Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 2

Artikel: Eine selbst-duale Begründung der projektiven Geometrie von K. Menger

Autor: Süss, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16352

Eine selbst-duale Begründung der projektiven Geometrie von K. Menger

I. Das Dualitätsprinzip, das in der ebenen Geometrie Punkt und Gerade, im Raum Punkt und Ebene einander vertauschbar gegenüberstellt, ist in der projektiven Geometrie eine tragende Säule, die wesentlich zur Geschlossenheit und Schönheit dieses geometrischen Gebäudes beiträgt. Es ist deshalb vom ästhetisch-methodischen wie auch vom logischen Gesichtspunkt aus erwünscht, daß schon in der Grundlegung der projektiven Geometrie, das heißt also im System ihrer Axiome, das Dualitätsprinzip zur Geltung kommt. Das kann nicht einfach dadurch geschehen, daß man zu jedem Axiom auch den dazu dualen Satz als ein Axiom hinzufügt, da man im allgemeinen dann beweisbare Sätze überflüssigerweise als Axiome aufstellt und gegen die Forderung verstößt, daß die einzelnen Axiome voneinander logisch unabhängig sein sollen. Viele der klassischen Werke über unseren Gegenstand lassen aber zunächst in den Axiomen das Dualitätsprinzip unbeachtet. Sie legen zum Beispiel Wert darauf, statt mit den Punkten, Geraden und Ebenen als Grundobjekten der Geometrie gleichzeitig zu beginnen, nur für eine Art von solchen, für die Punkte, Axiome aufzustellen, um dann die Geraden und Ebenen als gewisse Punktmengen daraus aufzubauen. Dabei kann natürlich das Dualitätsprinzip ein erst später beweisbarer Satz sein[1]). Der dadurch erreichte Gewinn, nur von einer Klasse von Elementen ausgehen zu müssen, wird aber mit dem Verzicht auf die dualen Symmetrien methodisch so teuer erkauft, daß man sich wundern kann, wie spät erst die Bemühungen zu einer in sich dualen Axiomatik der projektiven Geometrie einsetzen. K. Menger nimmt für sich in Anspruch, zuerst eine derartige Begründung der projektiven Geometrie gegeben zu haben[2]); er hat sich dabei verbandstheoretischer Mittel bedient und deren Grundoperationen «Vereinigung» und «Durchschnitt» mit den geometrischen Beziehungen des Verbindens und Schneidens gekoppelt. Den ersten lehrbuchartigen Aufbau der projektiven Geometrie auf selbst-dualer Grundlage nach den Anforderungen der Axiomatik scheint die *Einleitung in die höhere Geometrie* von L. Bieberbach[3]) zu enthalten, die vielleicht noch nicht nach Gebühr beachtet worden ist. Teilt man die Axiome ein in solche der Verknüpfung und der Dimension, so bestehen zwischen denjenigen der ersten Art bei Bieberbach und dem sogleich hier hauptsächlich zu nennenden neuen Axiomensystem von Menger besonders enge Beziehungen, denen ausführlich nachzugehen, dies auch in Verbindung mit den Dimensionsaxiomen, eine lohnende Aufgabe wäre.

II. K. Menger hat neuerdings einer Begründung der projektiven Geometrie in der Ebene die Begriffe Punkt und Gerade und die Inzidenzrelation in einem selbst-

[1]) So wird auch in dem bekannten Standardwerk von Veblen und Young postuliert, daß auf jeder Geraden drei Punkte liegen, aber aus den Axiomen dann bewiesen, daß durch jede Gerade drei Ebenen gehen.

[2]) K. Menger, *Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen*, Jber. DMV. *37*, 309–325 (1928). Von einer selbst-dualen Grundlage geht auch die Darstellung des bekannten Lehrbuches der analytischen Geometrie von Heffter und Koehler aus. Siehe auch L. Heffter, *Grundlagen und analytischer Aufbau der projektiven, euklidischen, nichteuklidischen Geometrie* (Teubner, Leipzig 1940).

[3]) Teubner, Leipzig und Berlin 1933.

dualen Axiomensystem zugrunde gelegt[1]). Die Hauptrolle spielen dabei gewisse selbst-duale Konfigurationen, die er «Oppositionen» nennt. Das vollständige Viereck und das Vierseit werden durch die Figur des «Viererzykels» ersetzt. Wir geben hier eine Skizze der Grundlagen dieser Geometrie. Als gegeben betrachtet werden Punkte und Geraden sowie eine Menge M ungeordneter Paare von je einem Punkt P und einer Geraden g, die «inzident» heißen, geschrieben $P \circ g$ oder $g \circ P$. Es bedeutet $P \circ^{+} g$, $g \circ^{+} P$, daß P und g nicht inzident, also ein nicht zur Menge M gehöriges Paar sind. Fünf Axiome liegen der Geometrie zugrunde:

1. Sind P, Q zwei verschiedene Punkte, so existiert mindestens eine Gerade g, so daß $P \circ g$, $g \circ Q$ ist.

2. Sind g, h zwei verschiedene Geraden, so existiert mindestens ein Punkt P, so daß $g \circ P$, $P \circ h$ ist.

3. Mit zwei verschiedenen Punkten sind nicht gleichzeitig zwei verschiedene Geraden inzident. (Es gibt keine «Linsen».)

Die somit durch P, Q bestimmte Gerade g wird mit $g = P + Q = Q + P$ bezeichnet, der durch g, h bestimmte Punkt P mit $P = g \cdot h = h \cdot g$. Es folgt sogleich das Grundlemma: Ist $P \neq Q \neq R$ und $R \circ (P + Q)$, so ist $P \circ (Q + R)$. Dazu dual: Ist $g \neq h \neq k$ und $k \circ (g \cdot h)$, so ist $g \circ (h \cdot k)$. Denn zunächst ist $P \circ (P + Q)$. Wäre nun $P \circ^{+} (Q + R)$, so wären also die Geraden $P + Q$ und $Q + R$ verschieden, und es würden $(Q, R, P + Q, Q + R)$ eine Linse bilden, was durch 3 ausgeschlossen wurde.

Eine «Opposition» ist ein ungeordnetes, nichtinzidentes Paar von Punkt und Gerade (P, g). Zwei Oppositionen (P, g), (Q, h) sind nur dann gleich, wenn $P = Q$ und $g = h$ ist. Zwei verschiedene Oppositionen heißen «verkettet», wenn $(P + Q) \circ (g \cdot h)$ ist, sonst «unverkettet». Die «Achse» $(P + Q)$ verketteter Oppositionen enthält drei verschiedene Punkte, ihr «Zentrum» $(g \cdot h)$ liegt auf drei verschiedenen Geraden. Um auszuschließen, daß die eingeführten Elementmengen leer sind, folgen zwei Existenzaxiome.

4. Es gibt (mindestens) ein Paar verketteter Oppositionen.

5. Es gibt (mindestens) ein Paar unverketteter Oppositionen.

Daß jede Gerade g mindestens zwei Punkte enthält (u. dual), sieht man leicht ein. Ist nämlich für die zwei weiteren Geraden h, k zweier unverketteter Oppositionen (P, h), $(Q, k) : g \circ (h \cdot k)$, so sind $(h \cdot k)$ und $g \cdot (P + Q)$ verschiedene Punkte von g. Ist aber $g \circ^{+} (h \cdot k)$, so sind $(g \cdot h)$ und $(g \cdot k)$ zwei verschiedene Punkte von g.

Die Achse $(P + Q)$ zweier verketteter Oppositionen (P, g), (Q, h) enthält mindestens drei Punkte: $P, Q, (g \cdot h)$, ihr Zentrum $g \cdot h$ mindestens drei Geraden $g, h, P + Q$. Aus dieser Tatsache ist mit Hilfe der zentralen Perspektivität leicht zu folgern, daß jede Gerade mindestens drei Punkte und jeder Punkt mindestens drei Geraden enthält. Alle Punktreihen (Strahlbüschel) lassen sich punktweise (geradenweise) eineindeutig aufeinander beziehen: Die projektive Ebene ist homogen.

Die logische Unabhängigkeit des Axioms 1 (2) von den anderen wird mit Hilfe der aus sieben Punkten und sieben Geraden bestehenden projektiven Ebene von Fano gezeigt, der man noch einen weiteren achten Punkt A (eine achte Gerade a) hinzufügt, der keiner der sieben Geraden (Punkte) angehört. Die Fano-Ebene besteht aus einem projektiven Koordinatendreieck mit Einheitspunkt im Innern und mit den

[1]) K. Menger, *The projective space*, Duke Math. J. *17*, 1–14 (1950); siehe auch C. r. Acad. Sci. Paris *228*, 1273–1274 (1949).

Ecktransversalen durch diesen. So entstehen sieben Punkte und sechs Geraden; eine siebente «Gerade» wird durch die drei Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den Dreieckseiten gedacht; dann liegen auf jeder Geraden drei Punkte, und durch jeden Punkt gehen drei Geraden. Die Hinzufügung eines weiteren Punktes A (Geraden a) widerspricht dann dem Axiom 1 (2), aber die Gesamtfigur genügt den übrigen Axiomen. Daß das Axiom 3 unabhängig von den anderen ist, zeigen die Großkreise der Kugelfläche. Ein gewöhnliches Dreieck mit drei Ecken und Seiten lehrt die Unabhängigkeit des Axioms 4, während schließlich diejenige des Axioms 5 durch folgendes Beispiel belegt wird: Es seien $m \geqq 3$ Punkte P_i und $n \geqq 3$ Geraden g_k vorhanden von der Art, daß alle Punkte nur mit g_1 und alle Geraden nur mit P_1 koinzidieren.

Ein «Vierzykel» ist ein aus vier zyklisch geordneten Punkten und vier Geraden bestehendes Viereck, wobei nicht drei aufeinanderfolgende Punkte auf einer Geraden liegen und nicht drei aufeinanderfolgende Geraden durch einen Punkt gehen. Seinen zwei Diagonalen entsprechen dual zwei Diagonalpunkte (Schnittpunkte von «Gegenseiten»). Jedes Paar von Diagonale und Diagonalpunkt bildet eine Opposition; es gibt vier derartige Diagonaloppositionen. Je nachdem, ob nur die Ecken oder die Seiten des Zykels betrachtet werden, werden Viereckzykel und Vierseitzykel unterschieden. Ein Viereckzykel $\mathfrak{P}$ und ein Vierseitzykel $\mathfrak{G}$ heißen «konjugiert», wenn ihre Punkte und Seiten sich so mit P_1, P_2, P_3, P_4 und g_1, g_2, g_3, g_4 bezeichnen lassen, daß $(g_i \cdot g_{i+1}) \circ (P_i + P_{i+1})$ ist. Die Paare $(g_1 \cdot g_3, P_2 + P_4)$ und $(g_2 \cdot g_4, P_1 + P_3)$ heißen konjugierte Diagonalelemente von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$. Der grundlegende *Satz von Desargues* und seine duale Umkehrung sind dann äquivalent zu der folgenden selbst-dualen Aussage: Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ konjugierte Viererzykel sind und wenn zwei konjugierte Diagonalelemente inzident sind, so sind es auch die beiden anderen. Für den *Satz von Pappus und Pascal* hat N. R. GOODMAN eine selbst-duale Formulierung innerhalb der Mengerschen Theorie angegeben: Es seien (P, g), (Q, h) und (R, k), (S, l) zwei Paare verketteter Oppositionen derart, daß $R \circ g$, $S \circ h$, $P \circ k$, $Q \circ l$ und $R \circ^+ h$, $S \circ^+ g$, $P \circ^+ l$, $Q \circ^+ k$, dann sind $(Q + S, g \cdot l)$ und $(P + R, h \cdot k)$ verkettete Oppositionen.

Eine genauere Durchführung dieser Grundlegung der projektiven Geometrie, die auch die anderen Ansätze gleicher Zielsetzung mit verarbeitet, um dabei einen möglichst einfachen und leicht erfaßbaren Aufbau zu erzielen, steht wohl noch aus. K. MENGER entwickelt auch eine anloge Begründung der räumlichen projektiven Geometrie auf analoger Grundlage mit Hilfe von zehn entsprechenden Axiomen.

III. Aus der gewöhnlichen euklidischen oder affinen Geometrie läßt sich leicht ein in sich dualer Bestandteil herauslösen[1]). Man braucht zum Beispiel mit MENGER in der Ebene außer einer uneigentlichen Geraden g_u und ihren Punkten noch einen uneigentlichen Punkt P_u und alle durch ihn gehenden Geraden aus der Ebene fortzulassen[2]). Dabei sind zwei Fälle möglich:

a) Liegt P_u auf g_u, so wähle man g_u als uneigentliche Gerade der euklidischen Ebene, P_u als uneigentlichen Punkt der y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Dann entsprechen sich dual parallele Geraden und «vertikale» Punkte, das heißt

[1]) K. MENGER, *Self-dual fragments of the ordinary plane*, Amer. math. Monthly *56*, 545–546 (1949).

[2]) Mit dieser Geometrie beschäftigt sich ausführlich die Dissertation von G. SIEHL, *Zentralaffine und zentraläquiforme Geometrie* (Freiburg i. Br. 1921).

solche, die auf ein und derselben Parallelen zur y-Achse liegen. Die symmetrische Gleichung

$$x X = y + Y$$

für die Inzidenz des Punktes (x, y) mit der Geraden (X, Y) erlaubt eine völlig symmetrische Darstellung dualer Tatsachen. Zum Beispiel entspricht die Bedingung des Parallelismus der Geraden (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2) : X_1 = X_2$ dabei dem Vertikalsein der Punkte (x_1, y_1), $(x_2, y_2) : x_1 = x_2$.

b) Liegt P_u nicht auf g_u, so sei g_u wie unter a gewählt, und es sei P_u der Ursprung O des rechtwinkligen Koordinatensystems der x, y. Dem Parellelismus von Geraden steht das «Proportionalsein» von Punkten dual gegenüber, das heißt daß sie mit O kollinear sind. In dieser nichteuklidischen Geometrie geht höchstens eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt, und es gibt darin dual höchstens einen proportionalen Punkt zu einem gegebenen Punkt auf einer gegebenen Geraden.

W. Süss, Freiburg i. Br.

L'œuvre de vulgarisation dans les mathématiques pures

La vulgarisation proprement dite n'est guère aimée du spécialiste : l'à peu près et la diffusion qu'elle exige lui semblent trop favoriser l'habitude d'un point de vue mal ajusté et par là faillir dans son but même.

En dehors des mathématiques pures cependant, la présentation populaire de la science moderne se poursuit impitoyablement. Une échelle conduit, d'analogie en analogie, à partir de faits usuels et de personnages familiers jusqu'aux découvertes et aux spéculations les plus abstruses.

Dans les mathématiques pures, rien de pareil n'a été mis en évidence jusqu'ici : le mathématicien pur, dans ses hautes recherches, peut encore se sentir hors d'atteinte de la vulgarisation au sens strict. A quoi tient cette situation insolite ? Est-elle louable ou non ?

La réponse demande une enquête détaillée : A quoi vise la vulgarisation dans les mathématiques pures ? A quoi sert-elle effectivement ? Quels domaines atteint-elle ? Y en-a-t-il qui doivent lui échapper toujours ? Les buts visés vont-ils persister ? Et les moyens utilisés – sont-ils au niveau de l'époque ? En quoi tout cela diffère-t-il du cas de la vulgarisation scientifique générale ?

Cette enquête préliminaire ne peut se faire dans le cadre d'une causerie. Mais pour l'amorcer, je voudrais soumettre les réflexions suivantes.

Autrefois, en mathématiques comme ailleurs, les exposés populaires s'adressaient à des patrons : ils servaient à justifier une demande d'aide financière ou encore à répondre à l'attaque d'adversaires, comme la fameuse lettre d'ARCHIMÈDE au roi Gelfond, qui fait connaître l'étendue prodigieuse de son système de numération.

D'une façon subjective, ces motifs ont toujours subsisté, même après la disparition des patrons et des adversaires déclarés. La concurrence des sujets réputés « utiles » leur redonnent une valeur objective de nos jours. Ils ne peuvent cependant être soutenus honnêtement s'ils ne concernent pas les principales branches des mathématiques travaillées à l'heure actuelle.