Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Vom Typ 19 ist nur die Nullmenge, vom Typ 26 nur die Allmenge. Endliche Mengen (außer 0) haben alle den Typ 18, von welchem es aber auch unendliche Mengen gibt. Die Typen 1 bis 12, 20 bis 26 als Mengen mit Innenpunkten, ferner 17 als perfekt sind nicht abzählbar. 15 und 18 sind sicher abzählbar, während es von den Typen 13, 14, 16, 27 sowohl abzählbare als auch nichtabzählbare Mengen gibt.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 106. Gegeben sind ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt A in der Ebene des Strahlenbüschels. Man durchlaufe von A aus eine völlig stetige, in A endende Kurve, die mit jedem Strahl des Büschels genau einen Punkt gemeinsam hat. Wenn die Kurve keine Gerade ist, besitzt sie entweder mindestens drei Wendepunkte oder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze. (Eine Kurve heißt «völlig stetig», wenn sie sowohl bezüglich ihrer Punkte als auch ihrer als existierend vorausgesetzten Tangenten stetig ist. Sie braucht hingegen nicht algebraisch, auch nicht einmal analytisch zu sein.)

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

1. Lösung: Geht die Tangente eines Punktes P der Kurve durch M, so muß P ein Wendepunkt oder eine Spitze sein, was leicht aus der Voraussetzung folgt, daß jede Gerade des Büschels in M genau einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat.

Sei P_0 ein gewöhnlicher Punkt der Kurve; seine Tangente geht also nicht durch M. Wir betrachten die Variation des Schnittpunktes Q der Tangente in P mit der Geraden P_0M, wenn P die Kurve in einem bestimmten Sinne durchläuft. Lassen wir P eine Umgebung von P_0 durchlaufen, so erreicht Q den Punkt P_0 und verläßt ihn wieder mit umgekehrter Bewegungsrichtung (dabei benützen wir, daß P_0M nicht Tangente in P_0 ist). Lassen wir P die Kurve von P_0 aus bis zurück nach P_0 durchlaufen, so muß Q seine Bewegungsrichtung in einem Punkte Q_1 ändern, da Q von P_0 ausgeht und mit umgekehrter Bewegungsrichtung nach P_0 zurückkommt. Der dem Punkte Q_1 entsprechende Punkt P_1 der Kurve ist ein Wendepunkt.

Es existiert also mindestens ein Wendepunkt P_1.

Wir betrachten jetzt die Variation des Schnittpunktes X der Tangente in P mit der Geraden P_1M, wenn P die Kurve in einem bestimmten Sinne durchläuft. Lassen wir P eine Umgebung von P_1 durchlaufen, so durchläuft X eine Umgebung von P_1 auf P_1M, ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern (dies gilt auch im Falle, daß P_1M Tangente in P_1 ist). Lassen wir P die Kurve von P_1 aus bis zurück nach P_1 durchlaufen, so bestehen genau zwei Möglichkeiten:

1. X durchläuft ein oder mehrere Male die ganze Gerade P_1M, ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern. Dann durchläuft X mindestens einmal den Punkt M. Die M entsprechenden Punkte der Kurve sind Spitzen, da X seine Bewegungsrichtung beim Durchlaufen von M beibehält. Es existiert also in diesem Falle mindestens eine Spitze.
2. X ändert seine Bewegungsrichtung in einem Punkte X_2. Dann ändert X seine Bewegungsrichtung in mindestens einem weiteren Punkte X_3, da X beim Wiedereintreffen von P in P_1 die ursprüngliche Bewegungsrichtung haben muß. Die den Punkten X_2 und X_3 entsprechenden Punkte P_2 und P_3 der Kurve sind weitere Wendepunkte.

Damit haben wir gezeigt, daß die Kurve entweder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze oder mindestens drei Wendepunkte besitzt.

Erste Bemerkung. Im obigen Falle 2 ist die Anzahl der Umkehrstellen von X immer gerade, woraus folgt, daß die Anzahl der Wendepunkte der Kurve stets ungerade ist (sofern sie endlich ist).

Zweite Bemerkung. Wir haben beim Beweis vorausgesetzt, daß die Kurve keine Geradenstücke enthält. Läßt man diese Voraussetzung fallen, wobei aber die Kurve selbst keine Gerade sein darf (damit der oben betrachtete Punkt X überhaupt variiert), so kann der Fall eintreten, daß Geradenstücke die Rolle von Wendepunkten spielen und bei der Abzählung der Wendepunkte hinzugenommen werden müssen.

J. EBERSOLD, Zürich.

2. Lösung. Vorbemerkung. Die Aufgabe impliziert, eine projektive, duale und vom Begriff der Differenzierbarkeit unabhängige Definition der Singularitäten zu geben. Der vorliegende Beweis stützt sich auf eine Definition, die durch die Kurven der metrischen Differentialgeometrie sicher erfüllt ist und in naheliegender Weise projektiv (und dual) formuliert wird, wobei die bekannte projektive Invarianz der einfachen metrischen Singularitäten zugrunde gelegt wird. Er zeigt den Inhalt der Behauptung als Folge aus den Eigenschaften der Bewegungen, welche von den Tangenten einer einsinnig durchlaufenen Kurve auf irgendeiner Geraden induziert werden. Eine Ableitung des benützten Bewegungs- oder Kurvenbegriffs aus den Axiomen ist sowenig angestrebt wie ein Nachweis, daß völlig stetige Kurven, abgesehen von mehrfachen Punkten und Geraden, *nur* Singularitäten der nachfolgend beschriebenen Art hätten. – Aus den Voraussetzungen (1) der völligen Stetigkeit, (2) der Geschlossenheit und (3) der eindeutigen Projizierbarkeit aus M folgt unmittelbar: 1. Die Kurve geht nicht durch M [sonst könnte es wegen (3) keine andern Punkte auf den Strahlen durch M geben]. 2. a) Die Kurve hat keine mehrfachen Punkte; b) gewöhnliche Tangenten *dürfen nicht*, c) Wendetangenten *können*, und 3. Spitzentangenten *müssen* durch M gehen. (Denn zu mehrfachen Punkten und zu gewöhnlichen Tangenten durch M gäbe es Nachbarstrahlen aus M mit mindestens zwei Schnittpunkten, und bei Spitzen desgleichen, wenn M nicht auf der Spitzentangente liegt.) 4. Schnabelspitzen kommen nicht vor.

Projektive Charakterisierung von Wendepunkt und Spitze. Metrisch ist die Wendetangente (mit Wendepunkt im Endlichen) durch Umkehr der *Drehrichtung* charakterisiert; also durch einen Umkehrpunkt der Bewegung des unendlichfernen Punktes der Tangenten. Projektiv kann aber jede Gerade unendlichfern sein. Also: die *Wendetangente* trifft *jede Gerade*, die nicht durch den Wendepunkt geht, in einem *Umkehrpunkt* der Bewegung des Tangentenschnittpunktes und bedingt auf den durch den Wendepunkt gehenden Geraden, einschließlich Wendetangente, eine Bewegung ohne Umkehrpunkt (I). Diese Bemerkung führt von selbst zur Charakterisierung von gewöhnlichem Punkt und Tangente sowie – dual zum Wendepunkt – der Spitze. Für einen *gewöhnlichen Punkt* hat die Bewegung des Tangentenschnittpunktes auf einer beliebigen (zum Beispiel der unendlichfernen) Geraden g keinen Umkehrpunkt, wenn die Gerade g nicht durch den Kurvenpunkt P geht, oder die Tangente p von P ist. Geht g durch P (ohne mit p zusammenzufallen), so ist P Umkehrpunkt (II). Und dual: die Bewegung des projizierenden Büschels aus einem beliebigen Punkt G hat keine Umkehrstelle, wenn G nicht auf der Tangenten p liegt, oder der Berührpunkt P von p ist. Liegt G auf p, so ist p Umkehrstrahl. Für später halten wir fest: eine Tangente a und eine durch den Berührpunkt A gehende Gerade q *trennen* – in genügend kleiner Umgebung von A – die Kurvenpunkte «vor und nach» A (III).

Und: Aus einem Wendepunkt werden seine Nachbarpunkte durch ein Strahlenbüschel mit der Wendetangente als Umkehrstrahl projiziert. – Die *Spitze* ist Umkehrstelle für die Bewegung in jedem projizierenden Büschel, dessen Scheitel nicht auf der Spitzentangente liegt, und keine Umkehrstelle für Büschel aus Punkten der Spitzentangente (IV).

Die zu sich selbst duale *Schnabelspitze* bedingt Umkehrstellen sowohl bei der durch Punkt- wie Tangentenbewegung in Strahlenbüschel bzw. Punktreihe induzierten Bewegung (sofern die Träger nicht mit der Schnabelspitze bzw. ihrer Tangente inzidieren).

Sieht man von den mehrfachen Punkten und Tangenten und von eventuellen Häufungsstellen der behandelten Singularitäten ab, so sind also die vier möglichen Arten von Stellen charakterisiert durch die vier Kombinationen des Auftretens (1) oder Nichtauftretens (0) von Umkehrstellen bei den Bewegungen, die induziert sind auf nicht mit den singulären Elementen inzidenten Grundgebilden erster Stufe [nach dem Schema $P(0, 0)$; $W(1, 0)$; $Sp(0, 1)$; $Schn\text{-}Sp(1, 1)$, wo die erste Ziffer sich auf die durch den Tangentenschnittpunkt in Punktreihen induzierte Bewegung und die zweite sich auf die dazu duale in Büscheln bezieht].

Beweis. Es sei A der Anfangspunkt. Er darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit als gewöhnlicher Punkt (mit der Tangente a) angenommen werden. M sei der Scheitel des eindeutig projizierenden Büschels. Wir betrachten die Bewegung des Schnittpunktes S der Tangente mit der Geraden $q = MA$; die Bewegung hat eine Umkehrstelle in A (II). Nun besitzt jede geschlossene Bewegung eine gerade Anzahl (einschließlich 0) von Umkehrstellen. Es sei U eine zweite außer A. Wir unterscheiden die Fälle, ob M von S erreicht wird oder nicht. a) Wenn ja, dann gehen Wende- oder Spitzentangenten durch M; und zwar, wenn M kein Umkehrpunkt ist, eine Spitzentangente (IV); und es liegt der zweite Teil der Behauptung vor; U entspricht (I) eine Wendetangente. Oder, wenn M Umkehrpunkt ist, läßt sich der Fall mit dem folgenden b) zusammenfassen: A ist die erste, U (wobei allenfalls $U = M$) die zweite Umkehrstelle, welcher der Wendepunkt W entspricht. Es gibt dann noch mindestens zwei weitere Umkehrstellen – woraus der Rest der Behauptung folgt: ihnen entsprechen noch zwei Wendepunkte. – Angenommen, es gibt außer W keinen weiteren Wendepunkt (*), also außer A und U keine weitere Umkehrstelle der Bewegung von S auf q. Durch jeden Punkt S gehen mindestens zwei Tangenten mit den Berührpunkten T_1 und T_2 «vor und nach» A; denn A ist Umkehrstelle. Diese sind durch a und q getrennt (III) und werden aus A durch zwei gegensinnige Büschel projiziert. Die Punkte T_1 und T_2 sind (mit Ausnahme von W) lauter gewöhnliche Punkte, weshalb die Bewegungen in den Strahlenbüscheln AT_1 und AT_2 keine Umkehrstellen haben können (und sich also «von a entfernen»). Bewegt sich nun S von A nach U, so durchläuft unter der Beweisannahme (*) das Paar T_1, T_2 die *ganze Kurve.* (Sonst würden dem Punkt U mehrere Wendepunkte entsprechen.) Damit ist der Widerspruch zur Annahme (*) erreicht: Einerseits laufen T_1 und T_2 stets getrennt durch a und q in verschiedenen Winkelgebieten, andererseits sollen sie die ganze Kurve durchlaufen. – Es gibt also außer A und U noch (eine gerade Anzahl von) Umkehrstellen, womit alles bewiesen ist.

Man veranschaulicht sich die Verhältnisse zweckmäßig, wenn man q auf die unendlichferne Gerade legt. Dann ist a Asymptote mit dem unendlichfernen Punkt A. Die Tangenten aus S sind parallel und die gegensinnigen Büschel AT_1 und AT_2 sind zwei nach entgegengesetzten Seiten sich von der Asymptote ablösende Parallelenscharen.

G. Balaster und G. Unger, Zürich.

Eine weitere Lösung unter wesentlicher Benützung von analytischen Hilfsmitteln sandte R. Lauffer (Graz). Die von G. Balaster und G. Unger benützten Sachverhalte über die auftretenden Bewegungen werden auf Grundlage eines einfachen Axiomensystems bewiesen in dem soeben erschienenen Buche von L. Locher-Ernst: *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven* (Birkhäuser, Basel 1952). Die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe sowie ähnliche Sätze ergeben sich fast unmittelbar aus allgemeinen, den (reellen) Kurvenverlauf regelnden Gesetzen.

Aufgabe 110. Es sei C eine gegebene Kurve außerhalb einer Ellipse E. Von den Punkten P von C werden die Tangenten an E gezogen. Für welche Punkte P hat das von der Berührungssehne abgeschnittene Ellipsensegment maximale oder minimale Fläche?

Vicente Inglada, Madrid.

Lösung: Mit einer flächentreuen Affinität Φ transformiert man die Ellipse E in einen Kreis K, die Kurve C in die Kurve C^*. Aus dem zum Punkte P auf C gehörenden Ellipsensegment wird ein Kreisabschnitt. Der Ort aller Punkte X^*, für welche die Fläche x des Kreisabschnittes einen festen Wert hat, ist ein zu K konzentrischer Kreis K_x. Durch den Punkt $\bar{P}^*$ der Kurve C^* geht der Kreis $K_{\bar{x}}$.

a) Die Fläche $\bar{x}$ des dem Punkte $\bar{P}^*$ zugeordneten Kreisabschnittes ist weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $K_{\bar{x}}$ die Kurve C^* schneidet oder $(2n+1)$-punktig berührt.

b) Die Fläche $\bar{x}$ ist ein Minimum (Maximum), wenn $K_{\bar{x}}$ die Kurve C^* in $\bar{P}^*$ $(2n)$-punktig berührt und in einer genügend kleinen Umgebung von $\bar{P}^*$ die Kurve C^* außerhalb (innerhalb) von $K_{\bar{x}}$ liegt.

Die Affinität Φ^{-1} transformiert den Punkt $\bar{P}^*$ auf C^* in den Punkt $\bar{P}$ auf C, den Kreis $K_{\bar{x}}$ in eine zu E konzentrische, ähnliche Ellipse, und die Kriterien a und b behalten ihre Gültigkeit. R. LAUFFER, Graz.

Eine weitere Lösung sandte H. DEBRUNNER (Lyß).

Aufgabe 111. Bei einem Dreieck mit den Seiten a, b, c ist die Potenz des Schwerpunktes in bezug auf den Umkreis gegeben durch $-(a^2+b^2+c^2)/9$. Man formuliere und beweise den entsprechenden Satz für n Punkte auf einer Kugelfläche beliebiger Dimensionszahl (in einem euklidischen Raum). A. STOLL, Zürich.

Lösung: Die n Punkte werden durch ihre Ortsvektoren $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit dem Ursprung im Zentrum der $(n-1)$-dimensionalen Kugel gegeben. Ist R der Kugelradius, so gilt $R^2 = A_1^2 = \cdots = A_n^2$. Der Schwerpunktsvektor ist

$$S = \frac{1}{n} \Sigma A_i$$

und die Potenz des Schwerpunktes

$$P = S^2 - R^2 = \frac{1}{n^2} (\Sigma A_i)^2 - R^2,$$

also

$$n^2 P = \Sigma A_i^2 + 2 \Sigma A_i A_j - n \Sigma A_i^2 = 2 \Sigma A_i A_j - (n-1) \Sigma A_i^2 .$$

Die n Punkte bilden ein Polytop mit $\binom{n}{2}$ Kanten, deren Quadratsumme

$$X = \Sigma (A_i - A_j)^2 = (n-1) \Sigma A_i^2 - 2 \Sigma A_i A_j = -n^2 P$$

ist, woraus

$$P = -\frac{1}{n^2} X .$$

A. BAGER, Hjørring, Dänemark.

Weitere Lösungen gingen ein von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), H. FAEHNDRICH (Bern), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (Bern).

Aufgabe 112. Ein Dreieck, bei dem der Abstand des Schwerpunktes vom Umkreismittelpunkt einem Drittel des Umkreisradius gleichkommt, ist rechtwinklig. Das Umgekehrte ist evident. A. STOLL, Zürich.

1. Lösung: In jedem Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt U, der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und das Zentrum F des Feuerbachschen Kreises $\mathfrak{F}$ auf der Eulerschen Geraden. Für die gegenseitigen Abstände gilt $US : SF : FH = 2:1:3$. Weil F die Strecke UH halbiert und der Radius von $\mathfrak{F}$ die Hälfte des Umkreisradius r ist, liegt H außerhalb bzw. innerhalb bzw. auf dem Umkreis $\mathfrak{U}$, wenn dasselbe für $\mathfrak{F}$ zutrifft. Es ist klar, daß H in spitzwinkligen Dreiecken innerhalb $\mathfrak{U}$, in rechtwinkligen auf $\mathfrak{U}$ liegt. In stumpfwinkligen Dreiecken liegt H ersichtlich außerhalb $\mathfrak{F}$, also auch außerhalb $\mathfrak{U}$. Davon gilt auch die Umkehrung. Ist nun $US = r/3$, so wird $UH = r$, und das Dreieck ist rechtwinklig. H. FAEHNDRICH, Bern.

Aus dieser Lösung ergibt sich sofort, daß die spitzwinkligen Dreiecke durch $US < r/3$, die stumpfwinkligen durch $US > r/3$ charakterisiert sind.

2. Lösung: Wählt man den Umkreis als Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene, so lautet die Bedingung

$$\left| \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}}{3} \right| = \frac{1}{3} .$$

Die Zahl $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma}$ muß also einerseits auf dem Einheitskreis liegen, anderseits aber auch auf dem Kreis um $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ mit Radius 1. Falls diese beiden Kreise nicht zusammenfallen, das heißt $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$, schneiden sie sich in den Punkten $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$.

Wenn also nicht $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=0$, so gilt entweder $e^{i\beta}+e^{i\gamma}=0$ oder $e^{i\alpha}+e^{i\gamma}=0$. In allen drei Fällen ist das Dreieck rechtwinklig. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), J. P. BOSS (La Chaux-de-Fonds), H. DEBRUNNER (Lyß), H. KÄUFL (Landshut, Bayern), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), A. MÓOR (Debrecĕn, Ungarn).

Aufgabe 113. Kann die Summe der ersten n Kubikzahlen für $n>1$ wieder eine Kubikzahl sein? (Vgl. Aufgabe 71.) E. TROST, Zürich.

Lösung: Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist das Quadrat der Dreieckszahl $n(n+1)/2$. Schon LEGENDRE hat bewiesen, daß außer 1 keine Dreieckszahl ein Kubus ist [*Essai sur la théorie des nombres*, 2. Aufl. (Paris 1808), S. 348]. Der Beweis stützt sich auf die Unlösbarkeit der diophantischen Gleichung $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ für $x \neq y$, welche durch eine «descente infinie» bewiesen wird. Somit ist auch das Quadrat einer Dreieckszahl $\neq 1$ kein Kubus.

Neue Aufgaben

145. Es sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, es sei $\overline{\lim}\, n_k/\log k = \infty$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$ transzendent. P. ERDÖS, London.

146. *Ein geometrisches Kriterium für reelle algebraische und transzendente Zahlen.* Es sei ein quadratisches Punktgitter gegeben. Die beiden Hauptrichtungen des Gitters nennen wir die horizontale und vertikale Richtung. g sei eine gegebene Gerade durch den Gitterpunkt O, s ihre Steigung. Nun denke man sich einen in O beginnenden rechtwinkligen Streckenzug $OP_1P_2P_3\ldots$, dessen Ecken P_1, P_3, P_5, ... auf vertikalen Gittergeraden liegen, während P_2, P_4, P_6, ... horizontalen Gittergeraden angehören. Die erste Strecke OP_1 liege auf der gegebenen Geraden g. Die Zahl s ist algebraisch von n-tem Grade, wenn man durch einen n-gliedrigen Streckenzug, aber nicht durch einen solchen mit weniger als n Gliedern, einen Gitterpunkt erreichen kann. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

147. Zwei konzentrische Kugeln drehen sich mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten um zwei Durchmesser, welche einen gegebenen Winkel bilden. Zwischen beiden Kugelflächen rollt ohne zu gleiten eine dritte Kugel, indem sie die beiden ersten berührt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zentrums der dritten Kugel und welche Kurve beschreibt die Spitze seines Ortsvektors? G. TORDION, Zürich.

148. U sei der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ oder kurz (A_i), $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Strahl (= Gerade mit Durchlaufungssinn) und $\mathfrak{x}_i$ sein Spiegelbild in bezug auf eine Normale zur Gegenseite von A_i $(i=1, 2, 3)$. Ferner seien F der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises von (A_i) und G_i seine ein gleichseitiges Dreieck bildenden «Grundpunkte», welche die äußeren Feuerbach-Kreisbogen von der Mitte bis zum Höhenfußpunkt der i-ten Seite im Verhältnis 1:2 teilen. Dann gilt:

1. Die drei Strahlenpaare $\mathfrak{x}_i$, UA_i haben parallele Winkelhalbierende.

2. Dank 1 gehört zu jedem Strahl $\mathfrak{x}$ bis auf Translationen eindeutig eine Gerade $g(\mathfrak{x})$, und zu jeder Geraden x gehört bis auf Translationen eindeutig ein rechtwinkliges Achsenkreuz $k(x)$.

3. $\mathfrak{x}$ und $g(\mathfrak{x})$ sind dann und nur dann parallel, wenn $\mathfrak{x}$ gegenläufig parallel ist zu einem der Strahlen FG_i.

4. Es gibt, abgesehen von Translationen, ein einziges rechtwinkliges Achsenkreuz $k(e)$, in bezug auf welches die Richtungskosinus a_i, b_i der Seiten von (A_i), unabhängig von deren Durchlaufungssinn, der Bedingung $\sum a_i b_i = 0$ genügen. Es entspricht der Euler-Geraden e von (A_i) und wird nur dann unbestimmt, wenn (A_i) gleichseitig ist. A. STOLL, Zürich.