Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 1

Artikel: Bemerkungen zum Satz von Bernoulli
Autor: Buchner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16349

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Es seien P und Q die beiden gegebenen Punkte und K der durch A_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ bestimmte Kegelschnitt (Figur 4). Der gesuchte Kegelschnitt soll durch die Punkte A_1, A_2, P und Q gehen und außerdem K berühren. Er gehört also zu dem durch diese vier Punkte bestimmten Büschel. Nach Satz III schneidet K jeden Kegelschnitt des Büschels noch in je zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden durch einen auf PQ gelegenen Punkt S gehen. Wir können diesen Punkt S mit einem beliebigen Exemplar des Büschels konstruieren und nehmen deshalb den durch die Geraden A_1Q und A_2P gebildeten entarteten Kegelschnitt. Der gesuchte Kegelschnitt ist also durch die vier gegebenen Punkte und den Berührungspunkt der Tangente von S an K bestimmt. Es gibt somit zwei Lösungen. Die Berührungspunkte finden wir als Schnittpunkte von K mit der Polaren s von S bezüglich K.

F. THOMISSEN, Heerlen, und G. TROMP, Sittard.

Bemerkung der Redaktion: Im Anschluß an die obige willkommene Mitteilung möchten wir auf den schönen Aufsatz von K. ROHN, *Ableitung einiger Kegelschnittsätze mit Hilfe von Schnittpunktsätzen* (Jber. dtsch. Math.-Ver. *16*, 359–377 [1907]) aufmerksam machen.

Bemerkungen zum Satz von Bernoulli

Der Satz von BERNOULLI krönt die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, daher sollte dieses Theorem auch im Schulunterricht die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschließen. Im folgenden soll ein Beweis skizziert werden, der nur Begriffe und Sätze verwendet, die üblicherweise behandelt werden.

Aus einer Urne werde eine Nummer x gezogen. p sei die Wahrscheinlichkeit, diese bestimmte Nummer x zu ziehen, und q die Gegenwahrscheinlichkeit, so daß

$$p + q = 1$$

ist. Dieses Experiment werde, bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p, n-mal wiederholt; dabei kann die Nummer $r = 0, 1, 2, \ldots, n$-mal gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein r-maliges Eintreffen des Ereignisses bei n-maliger Wiederholung ist nach NEWTON

$$w_n(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r},$$

wobei

$$\sum_{r=0}^{n} w_n(r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1 \tag{1}$$

ist. Zum Beweise unseres Satzes benötigen wir den Mittelwert oder Erwartungswert $E(r) = \bar{r}$ und die Streuung $\sigma^2(r)$ dieser binomischen Verteilung. Die Umformung

$$r\binom{n}{r} = \frac{n!\,r}{r!\,(n-r)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,[(n-1)-(r-1)]!} = n\binom{n-1}{r-1} \tag{2}$$

erlaubt die Berechnung des Mittelwertes

$$\bar{r} = \sum_{r=0}^{n} r\,w_n(r) = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = n\,p \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)},$$

somit nach (1)

$$\bar{r} = n\,p. \tag{3}$$

Ebenso einfach ist die Berechnung der Streuung

$$\sigma^2(r) = \sum_{r=0}^{n} (r - \bar{r})^2\, w_n(r) = \sum_{r=0}^{n} r^2\, w_n(r) - 2\,\bar{r} \sum_{r=0}^{n} r\, w_n(r) + \bar{r}^2 \sum_{r=0}^{n} w_n(r).$$

Nach (1) und (3) folgt hieraus

$$\sigma^2(r) = \sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r} p^r\, q^{n-r} - 2\,n\,p \cdot n\,p + n^2\,p^2.$$

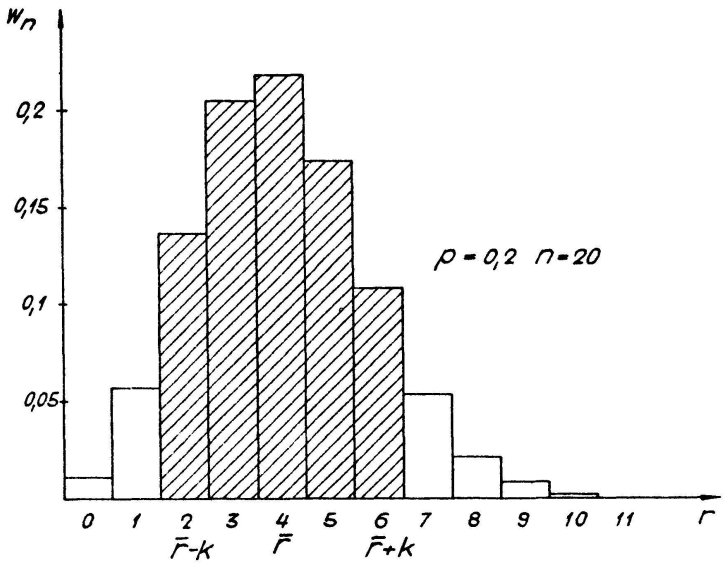

Fig. 1

Verwendet man wiederum die Umformung (2), so folgt

$$\sigma^2(r) = \sum_{r=1}^{n} r\,n \binom{n-1}{r-1} p^r\, q^{n-r} - n^2\,p^2 = n\,p \sum_{r=1}^{n} r \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}\, q^{(n-1)-(r-1)} - n^2\,p^2.$$

Wir setzen $r - 1 = t$ und erhalten

$$\sigma^2(r) = n\,p \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \binom{n-1}{t} p^t\, q^{(n-1)-t} - n^2\,p^2$$

$$= n\,p \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} t \binom{n-1}{t} p^t\, q^{(n-1)-t} + \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} p^t\, q^{(n-1)-t} \right\} - n^2\,p^2.$$

Mit (1) und (3) ergibt sich hieraus

$$\sigma^2(r) = n\,p\,\{(n-1)\,p + 1\} - n^2\,p^2 = n\,p\,(1-p) = n\,p\,q.$$

Entsprechend seiner Definition ist der Mittelwert $\bar{r}$ die Abszisse des Schwerpunktes der Einheitsfläche, die von

$$w_n(r) = \binom{n}{r} p^r\, q^{n-r}$$

umschlossen wird. Unschwer kann bewiesen werden, daß $\bar{r}$ auch die Trefferzahl mit der größten Wahrscheinlichkeit ist, jedoch ist diese Tatsache für den Beweis nach BIENAYMÉ[1]) und TSCHEBYSCHEFF[2]) unerheblich.

Der in Figur 1 schraffierte Bereich über $\bar{r} - k$ bis $\bar{r} + k$ umfaßt ein Gebiet um den Schwerpunkt. Für irgendein positives k gilt dann die Abschätzung

$$\sigma^2(r) = \sum_{r=0}^{n} (r - \bar{r})^2 w_n(r) > \sum_{r=0}^{\bar{r}-k} (r - \bar{r})^2 w_n(r) + \sum_{r=\bar{r}+k}^{n} (r - \bar{r})^2 w_n(r), \tag{4}$$

da die zum schraffierten Bereiche gehörenden positiven Summanden weggelassen wurden.

Die Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (4) beziehen sich auf die Trefferzahlen r, die zum nichtschraffierten Gebiete gehören, für die also

$$|r - \bar{r}| > k$$

ist. Daher kann die rechte Seite der Ungleichung (4) abermals verkleinert werden dadurch, daß der Faktor $|r - \bar{r}|$ durch seinen kleinsten Wert k ersetzt wird:

$$\sigma^2(r) > k^2 \left\{ \sum_{r=0}^{\bar{r}-k} w_n(r) + \sum_{r=\bar{r}+k}^{n} w_n(r) \right\}. \tag{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Trefferzahl r zum schraffierten Bereich gehört, daß also

$$|r - \bar{r}| < k$$

gilt, heiße

$$S(k) = \sum_{r=\bar{r}-k}^{\bar{r}+k} w_n(r).$$

Damit bringen wir die Ungleichung (5) auf die Form

$$\sigma^2(r) > k^2 [1 - S(k)]$$

oder aber

$$S(k) > 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}. \tag{6}$$

Diese Ungleichung von BIENAYMÉ und TSCHEBYSCHEFF wenden wir auf die binomische Verteilung an, wo $\sigma^2 = n\,p\,q$ zu setzen ist. Außerdem setzen wir für die halbe Breite des schraffierten Bereiches

$$k = n\,\varepsilon,$$

wobei ε eine beliebig kleine positive Größe bezeichnet. Dann folgt aus (6)

$$S(\varepsilon) > 1 - \frac{n\,p\,q}{n^2\,\varepsilon^2} = 1 - \frac{p\,q}{n\,\varepsilon^2}. \tag{7}$$

---

[1]) J. I. BIENAYMÉ, *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi des probabilités dans la méthode des moindres carrés*, C. r. Acad. Sci. Paris *37*, 159–184 (1855).

[2]) P. L. TSCHEBYSCHEFF, J. Liouville [II] *12*, 177–184 (1867).

Für das n-mal wiederholbare Experiment sind p, q, ε vorgegebene, feste Zahlen. Wie klein ε auch gewählt wird, so wird doch $S(\varepsilon)$ mit wachsendem n gegen 1 streben. Die Wahrscheinlichkeit $S(\varepsilon)$, daß die Trefferzahl r zwischen $n(p-\varepsilon)$ und $n(p+\varepsilon)$ liegt oder daß die relative Trefferzahl r/n sich von p um weniger als ε unterscheidet, daß also

$$\left|\frac{r}{n} - p\right| < \varepsilon$$

ist, geht mit wachsender Versuchszahl n gegen 1.

Beispiel. Die Zahl 6 trete beim Würfeln mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 auf. Wie groß muß die Zahl der Würfe n gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit 0,999 dafür beträgt, daß die relative Trefferzahl r/n sich von 1/6 um weniger als $\varepsilon = 1/60$ unterscheidet?

Nach (7) gilt

$$S(\varepsilon) > 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n\,\frac{1}{3600}} > 0{,}999$$

oder

$$n > 500000.$$

Wird dieser Würfel 500000mal geworfen, so kann man 1:999 wetten, daß die beobachtete relative Trefferzahl $r/500000$ sich von 1/6 um weniger als 1/60 unterscheidet, das heißt, daß

$$\left|\frac{r}{500000} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{60}$$

ist, oder daß für die wirklich beobachtete Trefferzahl gilt

$$75000 < r < 91667.$$

Eine schärfere Abschätzung zeigt, daß nur $n > 5\,415$ sein muß.

P. BUCHNER, Basel.

Eine kombinatorische Systematik der Punktmengen

In Ergänzung zum sonst üblichen Vorgehen bei den Grundbegriffen der Punktmengenlehre sei hier eine von kombinatorischen Gesichtspunkten getragene Systematik gegeben.

Wir nehmen einen gewöhnlichen euklidischen Gesamtraum (Gerade, Ebene) an und in ihm eine Punktmenge M, deren Komplement auf den Gesamtraum $\overline{M}$ heißen möge. Wir klassifizieren nun einen beliebigen Punkt des Raumes nach folgenden drei Fragen: 1. Ist er Punkt von M? 2. Ist er Häufungspunkt von M? 3. Ist er Häufungspunkt von $\overline{M}$? — Die rein kombinatorisch vorhandenen acht Möglichkeiten treten nicht alle auf, weil ein Punkt sicher mindestens Häufungspunkt von M oder von $\overline{M}$ sein muß. Die gleichzeitige Verneinung der 2. und 3. Frage scheidet also aus.