Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1952)

Heft: 1

Artikel: Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen

Autor: Thomissen, F. / Tromp, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16348

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

il est vrai, que les éléments de géométrie analytique insérés dans ces éditions ne pouvaient rien contenir qui ne se trouvât dans la troisième.

Les précisions que nous avons données montrent l'importance du rôle joué par MONGE dans la création des coordonnées axiales de la droite. S'il n'appliqua pas, comme PLÜCKER le fit en 1865, ces coordonnées à l'étude de la géométrie réglée et des systèmes de forces, il faut néanmoins noter que c'est à lui que l'on doit la première étude des congruences de droites et en particulier des congruences de normales, et qu'il est passé très près de la considération des complexes de droites dans son *Traité élémentaire de statique*[1]).

Pour conclure, nous poserons deux questions:

L'expression classique de «coordonnées pluckériennes» mérite-t-elle vraiment de s'appliquer aux coordonnées axiales de la droite?

Est-il certain que PLÜCKER, qui connaissait très bien l'œuvre de MONGE et qui se considérait comme un de ses disciples, n'ait lu ni son important mémoire sur les développées, ni l'une des deux premières éditions de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*?

RENÉ TATON, Paris.

Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen

J.-P. SYDLER hat in dieser Zeitschrift[2]) eine Methode angegeben, um in einem gegebenen Punkt eines Kegelschnittes den Krümmungskreis zu konstruieren. In Abweichung von dieser Methode, bei der unter anderem Gebrauch gemacht wird von den Eigenschaften der projektiven Punktreihen, folgen hier einige Konstruktionen – worunter die Konstruktion des Krümmungskreises in einem Punkt eines Kegelschnittes –, die auf den bekannten Sätzen von STURM und PASCAL beruhen.

I. *Satz von Sturm.* Haben drei Kegelschnitte zwei Punkte gemeinsam, so gehen die drei Verbindungsgeraden der übrigen Punkte, die sie zu je zweien gemeinsam haben, durch einen Punkt (Punkt von STURM).

Beweis. Wir denken uns die drei Kegelschnitte durch eine komplexe projektive Transformation aus drei Kreisen entstanden. Die zwei isotropen Punkte gehen dabei in zwei gemeinsame Punkte über, während das Potenzzentrum in den Punkt von STURM übergeht.

II. Der *Satz von Pascal* kann in folgender Weise aus dem Satz von STURM abgeleitet werden (siehe Figur 1): Auf einem Kegelschnitt K_1 seien sechs Punkte A_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) gegeben. Wir betrachten nun die Verbindungsgeraden A_1A_6 und A_2A_3 als entarteten Kegelschnitt K_2; die Verbindungsgeraden A_3A_4 und A_5A_6 als entarteten Kegelschnitt K_3. Die Kegelschnitte K_1, K_2 und K_3 haben die Punkte A_3 und A_6 gemeinsam, und die beiden entarteten Kegelschnitte schneiden sich außer

---

[1]) Pour toutes les questions annexes, on pourra consulter nos deux études: R. TATON, *Gaspard Monge*, Beih. El. Math., n° 9 (Birkhäuser, Bâle 1950); *L'Œuvre scientifique de Monge* (Presses Universitaires de France, Paris 1951).

[2]) J.-P. SYDLER, *Construction à l'aide de la règle et de l'équerre du diamètre de courbure en un point d'une conique*, El. Math. *5*, 49 (1950).

in A_3 und A_6 noch in den Punkten S_1 und S_2. Nach dem Satz von STURM gehen nun die Geraden A_1A_2, A_4A_5 und S_1S_2 durch *einen Punkt* S. Die Schnittpunkte S, S_1 und S_2 der Verbindungsgeraden A_1A_2, A_4A_5; A_2A_3, A_5A_6 und A_3A_4, A_6A_1 liegen somit auf einer Geraden.

III. Ein Kegelschnitt, der durch zwei Basispunkte eines Kegelschnittbüschels geht, schneidet jeden Kegelschnitt des Büschels noch in je zwei weiteren Punkten, deren Verbindungsgeraden sich in einem Punkte der durch die zwei anderen Basispunkte des Büschels bestimmten Geraden schneiden.

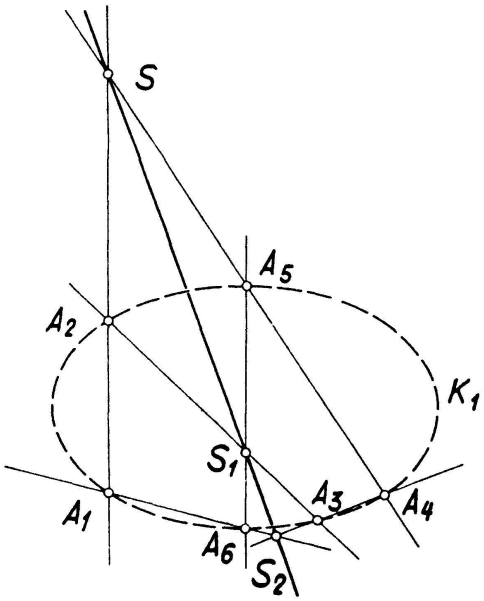

Fig. 1

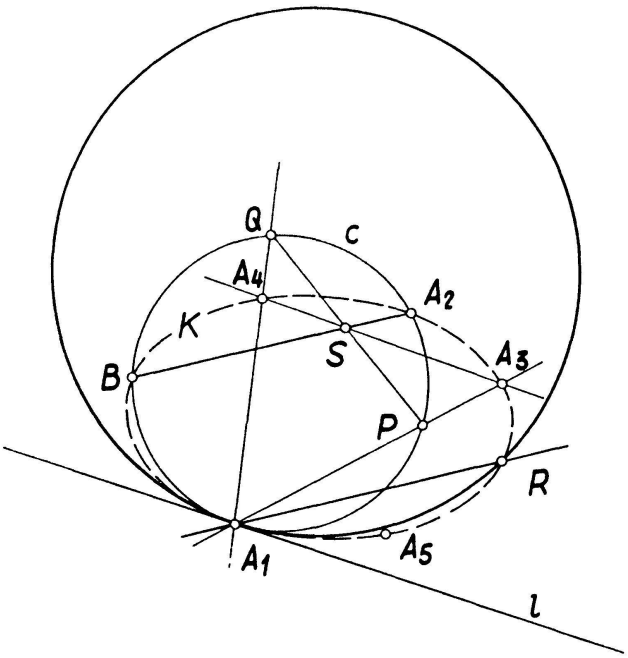

Fig. 2

Dieser Satz ergibt sich direkt durch Anwendung des Satzes von STURM auf K, K_1 und K_i $(i = 2, 3, 4, \ldots)$, wo K_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ die Kegelschnitte des Büschels und K den Kegelschnitt durch zwei der Basispunkte bedeutet.

Bemerkung. Nehmen wir in Satz III als Kegelschnittbüschel ein Kreisbüschel, so ergibt sich, daß jeder Kreis des Büschels den Kegelschnitt noch in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungsgeraden parallel sind.

Konstruktion 1 (Figur 2). Gegeben: Der Kegelschnitt K durch die Punkte A_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$.

Man konstruiere im Punkt A_1 den Krümmungskreis von K.

Mittels des Satzes von PASCAL konstruieren wir die Tangente l in A_1 an K. Darauf konstruieren wir den Kreis c, der l in A_1 berührt und durch einen der Punkte A_i $(i = 2, 3, 4, 5)$ geht, zum Beispiel durch A_2. Der Kreis c schneidet K noch in einem Punkt B. Diesen Schnittpunkt B bestimmen wir durch Anwendung des Satzes von STURM auf die Kegelschnitte K, c und den durch die Geraden A_1A_3 und A_1A_4 gebildeten entarteten Kegelschnitt.

Nach der Bemerkung zu Satz III wird jeder Kreis, der l in A_1 berührt, K noch in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgeraden zu A_2B parallel sind. Beim Krümmungskreis fällt einer dieser beiden Schnittpunkte zusammen mit A_1. Der

andere Schnittpunkt liegt somit auf der Geraden durch A_1 parallel zu A_2B. Diese Gerade schneidet K noch in R, so daß der Krümmungskreis durch den Berührungspunkt A_1 und den Punkt R bestimmt ist.

Konstruktion 2. Zwei Kegelschnitte haben zwei Punkte gemeinsam; man konstruiere die Verbindungsgerade der andern beiden Schnittpunkte.

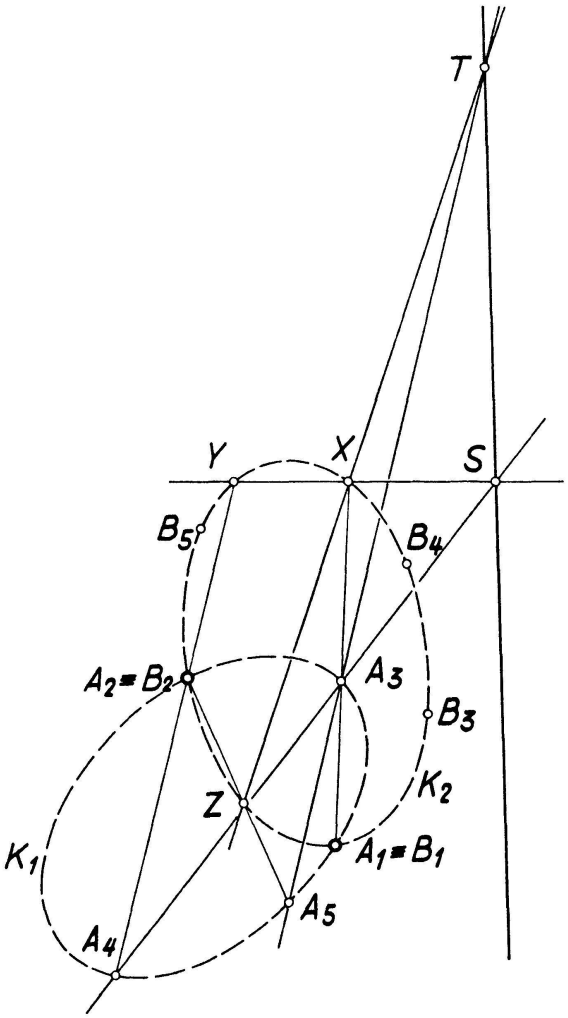

Fig. 3

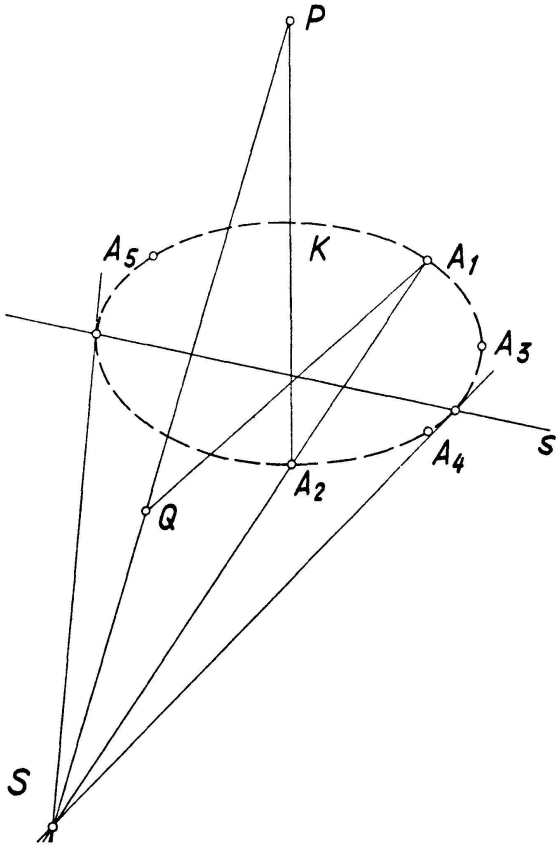

Fig. 4

Die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 seien beziehungsweise gegeben durch die Punkte A_i und B_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$), wobei $A_1 \equiv B_1$ und $A_2 \equiv B_2$ (Figur 3). K_1 und K_2 bestimmen ein Kegelschnittbüschel, von dem A_1 und A_2 Basispunkte sind. Der aus den Geraden A_1A_3 und A_2A_4 gebildete entartete Kegelschnitt schneidet K_2 noch in den Punkten X und Y. Nach Satz III ist der Schnittpunkt von A_3A_4 und XY ein auf der Verbindungsgeraden der andern beiden Basispunkte liegender Punkt S. Der durch die Geraden A_1A_3 und A_2A_5 gebildete entartete Kegelschnitt schneidet K_2 noch in den Punkten X und Z. Der Schnittpunkt T der Geraden A_3A_5 und XZ liegt also auch auf der Verbindungsgeraden der beiden andern Basispunkte. Somit ist TS die gesuchte Gerade.

Konstruktion 3. Man konstruiere den Kegelschnitt, der mit einem gegebenen Kegelschnitt zwei Punkte gemeinsam hat, ihn außerdem berührt und noch durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien P und Q die beiden gegebenen Punkte und K der durch A_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ bestimmte Kegelschnitt (Figur 4). Der gesuchte Kegelschnitt soll durch die Punkte A_1, A_2, P und Q gehen und außerdem K berühren. Er gehört also zu dem durch diese vier Punkte bestimmten Büschel. Nach Satz III schneidet K jeden Kegelschnitt des Büschels noch in je zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden durch einen auf PQ gelegenen Punkt S gehen. Wir können diesen Punkt S mit einem beliebigen Exemplar des Büschels konstruieren und nehmen deshalb den durch die Geraden A_1Q und A_2P gebildeten entarteten Kegelschnitt. Der gesuchte Kegelschnitt ist also durch die vier gegebenen Punkte und den Berührungspunkt der Tangente von S an K bestimmt. Es gibt somit zwei Lösungen. Die Berührungspunkte finden wir als Schnittpunkte von K mit der Polaren s von S bezüglich K.

F. THOMISSEN, Heerlen, und G. TROMP, Sittard.

Bemerkung der Redaktion: Im Anschluß an die obige willkommene Mitteilung möchten wir auf den schönen Aufsatz von K. ROHN, *Ableitung einiger Kegelschnittsätze mit Hilfe von Schnittpunktsätzen* (Jber. dtsch. Math.-Ver. *16*, 359–377 [1907]) aufmerksam machen.

Bemerkungen zum Satz von Bernoulli

Der Satz von BERNOULLI krönt die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung, daher sollte dieses Theorem auch im Schulunterricht die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschließen. Im folgenden soll ein Beweis skizziert werden, der nur Begriffe und Sätze verwendet, die üblicherweise behandelt werden.

Aus einer Urne werde eine Nummer x gezogen. p sei die Wahrscheinlichkeit, diese bestimmte Nummer x zu ziehen, und q die Gegenwahrscheinlichkeit, so daß

$$p + q = 1$$

ist. Dieses Experiment werde, bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p, n-mal wiederholt; dabei kann die Nummer $r = 0, 1, 2, \ldots, n$-mal gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein r-maliges Eintreffen des Ereignisses bei n-maliger Wiederholung ist nach NEWTON

$$w_n(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r},$$

wobei

$$\sum_{r=0}^{n} w_n(r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1 \tag{1}$$

ist. Zum Beweise unseres Satzes benötigen wir den Mittelwert oder Erwartungswert $E(r) = \bar{r}$ und die Streuung $\sigma^2(r)$ dieser binomischen Verteilung. Die Umformung

$$r\binom{n}{r} = \frac{n!\,r}{r!\,(n-r)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,[(n-1)-(r-1)]!} = n\binom{n-1}{r-1} \tag{2}$$

erlaubt die Berechnung des Mittelwertes

$$\bar{r} = \sum_{r=0}^{n} r\,w_n(r) = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = n\,p \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)},$$