Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker

Autor(en): **Taton, René**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16347

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VII Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 15. Januar 1952

Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker

Tous les historiens des mathématiques dont nous avons pu consulter les travaux attribuent l'introduction des coordonnées axiales de la droite à J. PLÜCKER (1801 à 1868) et à A. CAYLEY (1821 à 1895); nous ne citerons à ce propos que les deux études assez récentes de G. LORIA et J.-L. COOLIDGE[1]).

Après deux tentatives encore insuffisamment mises au point et publiées en 1846 et 1864[2]), J. PLÜCKER présenta dans une note additionnelle, rédigée en décembre 1865 et publiée à la suite de sa seconde étude citée, la notation depuis lors classique des six coordonnées homogènes de la droite, l, m, n, λ, μ, ν, liées entre elles par la relation bilinéaire $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$[3]). Il tira de suite le meilleur parti de cette notation nouvelle, tant dans l'étude des congruences, des complexes de droites et de l'ensemble de la géométrie réglée que dans celle des systèmes de forces[4]). Indépendamment de PLÜCKER, CAYLEY avait, de son côté, conçu en 1859 la notation des coordonnées axiales de la droite[5]), mais ce n'est qu'après les publications du géomètre allemand qu'il se décida à en publier une tardive mais remarquable étude d'ensemble[6]).

GASPARD MONGE n'est cité ni par PLÜCKER, ni par CAYLEY, ni, à notre connaissance, par aucun de ceux qui ont écrit l'historique de cette partie de la géométrie

---

[1]) G. LORIA, *Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de coordonnées*, Mathematica *18*, 125–145 (1942); *20*, 1–22 (1944) [reproduit dans: Osiris *8*, 218–288 (1948)]. – J. L. COOLIDGE, *A History of Geometrical Methods* (University Press, Oxford 1940).

[2]) J. PLÜCKER, *System der Geometrie des Raumes* (Dusseldorf 1846), p. 322; *On a New Geometry of Space*, Phil. Trans. Roy. Soc. London *155*, 725–791 (1865) [reproduit dans: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1 (Leipzig 1895), pp. 469–545] = mémoire présenté le 22 décembre 1864.

[3]) Dans une note additionnelle reçue le 11 décembre 1865 et publiée à la suite du mémoire précédemment cité (cf. *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1, pp. 525–545). La traduction française du mémoire et de la note sont dans: J. Math. pures appl. [2e s.] *2*, 337–404 (1866).

[4]) J. PLÜCKER, *Fundamental Views regarding Mechanics*, Phil. Trans Roy. Soc. London *156*, 361–380 (1866) [reproduit dans: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1, pp. 546–568]; *Géométrie de l'espace*, Les Mondes *13*, 79–84 (1867) [reproduit dans: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1, pp. 570–575]; *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction*, Ann. Math. [2e s.] *1*, 160–169 (1867) [reproduit dans: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1, pp. 576–585]; *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, 2 volumes (Leipzig 1868/1869).

[5]) A. CAYLEY, *On a new analytical Representation of Curves in Space*, Quart. J. pure appl. Math. *3*, 225–276 (1860); *5*, 81–86 (1862) [reproduit dans: *Collected Mathematical Papers*, t. 4 (Cambridge 1891), pp. 446–455, 490–494] = mémoires datés des 2 juin 1859 et 30 octobre 1860.

[6]) A. CAYLEY, *On the six Coordinates of a Line*, Trans. Cambridge Phil. Soc. *11*, 2e partie, 290–323 (1869) [reproduit dans: *Collected Mathematical Papers*, t. 7, pp. 66–98] = mémoire lu le 11 novembre 1867.

analytique; cependant, nous avons pu établir son antériorité indéniable dans ce domaine.

Nous trouvons ses premières idées à ce sujet dans son célèbre *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure*[1]), présenté devant l'Académie Royale des Sciences de Paris le 31 août 1771 et publié en 1785. Quoiqu'il traitât exclusivement de questions de géométrie infinitésimale, MONGE avait dû intercaler dans son mémoire deux lemmes très élémentaires de géométrie analytique se rapportant à l'équation du plan mené par un point perpendiculairement à un plan donné et aux équations de la perpendiculaire à un plan menée par un point donné. Ces problèmes avaient, en effet, été négligés par tous les auteurs, qui, depuis DESCARTES et FERMAT, avaient étudié la géométrie analytique, et MONGE dut traiter ces questions élémentaires avant de pouvoir déterminer l'équation du plan normal et l'expression du rayon de courbure en un point d'une courbe de l'espace. C'est à l'occasion du premier de ces problèmes qu'il introduisit les six coordonnées axiales de la droite dans un passage que nous citerons en corrigeant une faute typographique évidente qui apparaît dans la relation qui relie ces coordonnées[2]).

« Soient

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \quad \& \quad a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0;$$

les équations données de la droite, & x', y' & z' les coordonnées du point donné. On aura les équations des trois projections de la droite sur les trois plans, en éliminant successivement une des trois variables x, y, & z des deux équations précédentes; ainsi ces trois équations seront

$$[a\,b' - a'\,b]\,y - [c\,a' - c'\,a]\,z + a\,d' - a'\,d = 0$$

$$[c\,a' - c'\,a]\,x - [b\,c' - b'\,c]\,y + c\,d' - c'\,d = 0$$

$$[b\,c' - b'\,c]\,z - [a\,b' - a'\,b]\,x + b\,d' - b'\,d = 0$$

& si l'on fait pour abréger,

$$a\,b' - a'\,b = \alpha \qquad a\,d' - a'\,d = \delta$$

$$c\,a' - c'\,a = \beta \qquad c\,d' - c'\,d = \varepsilon$$

$$b\,c' - b'\,c = \gamma \qquad b\,d' - b'\,d = \zeta,$$

elles deviendront

$$\alpha\,y - \beta\,z + \delta = 0$$

$$\beta\,x - \gamma\,y + \varepsilon = 0$$

$$\gamma\,z - \alpha\,x + \zeta = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques supposent le troisième, parce que deux projections d'une droite suffisent pour la déterminer dans l'espace; donc les six quantités α, β, γ, δ, ε & ζ ne sont pas indépendantes les unes des autres: elles doivent être telles que ces trois équations aient lieu à la fois; & on trouvera la relation qu'elles ont entre elles en multipliant la première par γ, la seconde par α, la troisième par β; & ajoutant, ce qui donne

$$\alpha\,\varepsilon + \beta\,\zeta + \gamma\,\delta = 0,$$

1) Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, & lûs dans les Assemblées *10*, 511–550 (Paris 1785), avec deux planches.

2) Op. cit., pp. 524–25

équation qui est identique, & se vérifie par la substitution des valeurs de α, β, γ, δ, ε & ζ.»

Ces problèmes de géométrie analytique n'apparaissant que pour leur application immédiate à des questions de géométrie infinitésimale, MONGE n'insiste pas sur la notation nouvelle qu'il introduit, mais il semble bien qu'il en avait, dès cette époque, compris toute l'importance.

Nous trouvons un emploi beaucoup plus étendu et plus systématique de ces coordonnées dans un bref exposé de géométrie analytique qui se trouve au début des deux premières éditions du grand traité de MONGE: *l'Application de l'Analyse à la Géométrie*. Ces deux éditions, publiées en 1795 et 1801 sous le titre de *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie*[1]), sont aujourd'hui très rares, et la plupart des historiens des mathématiques n'ont consulté que les trois éditions ultérieures du traité, publiées sous le titre définitif en 1807, 1809 et 1850[2]); c'est probablement pour cette raison qu'ils n'ont pas trouvé les passages que nous allons étudier et qui ne se trouvent que dans les deux premières éditions.

Cette très brève et très importante étude de géométrie analytique[3]) est constituée par la solution de treize problèmes fondamentaux relatifs aux éléments du premier ordre, droites et plans, qui entrent ainsi véritablement pour la première fois dans le domaine de la géométrie analytique classique.

C'est avec le problème VIII: «Deux plans étant donnés, trouver les projections de leur intersection», que les coordonnées axiales de la droite se trouvent naturellement réintroduites comme dans le mémoire précédemment cité; les notations y sont quelque peu transformées, et les équations de la droite intersection des deux plans:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \quad \text{et} \quad A'\,x + B'\,y + C'\,z + D' = 0$$

sont mises sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} l\,y - m\,x + \nu &= 0 \\ m\,z - n\,y + \lambda &= 0 \\ n\,x - l\,z + \mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{avec la condition} \quad l\,\lambda + m\,\mu + n\,\nu = 0.$$

Et MONGE précise:

«C'est sous cette forme générale qu'il est plus avantageux de mettre les équations d'une ligne droite donnée dans l'espace. Des six constantes l, m, n, λ, μ, ν, qui y entrent, il n'y en a que quatre qui soient nécessaires. Une d'entre elles est toujours déterminée par l'équation de condition $l\,\lambda + m\,\mu + n\,\nu = 0$; une autre est arbitraire, et l'on peut en disposer, de manière qu'en égalant à zéro certaines quantités compliquées, les opérations de l'analyse deviennent plus faciles.»

Ces coordonnées de la droite se trouvent utilisées dans la solution des problèmes X, XI, XII et XIII: détermination de l'angle de deux droites, de l'angle d'une droite et d'un plan, de la plus courte distance de deux droites et des équations de la perpendiculaire

[1]) La première édition est formée par la réunion de feuilles de cours, imprimées une à une à l'intention des élèves de la première promotion de l'Ecole polytechnique. La deuxième édition est un ouvrage in-4° de 138 pages, non numérotées, mais divisé en 34 «feuilles» d'un nombre variable de pages.

[2]) L'édition de 1807 comporte une première partie, consacrée à l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (géométrie analytique du premier et du second degrés) qui est supprimée dans les éditions suivantes.

[3]) 12 pages dans l'édition in-4° de 1801.

commune à deux droites. Nous donnerons quelques détails sur la solution de ce dernier problème qui montre que MONGE avait très bien compris l'intérêt de la nouvelle notation qu'il avait introduite.

Les coordonnées axiales de la droite cherchée étant l, m, n, λ, μ, ν, et les coordonnées des droites données, respectivement l', m', n', λ', μ', ν' et l'', m'', n'', λ'', μ'', ν'', il écrit tout d'abord la relation qui lie les six quantités cherchées:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0. \tag{1}$$

Puis, il écrit les deux conditions de perpendicularité:

$$l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0, \tag{2}$$

$$l\,l'' + m\,m'' + n\,n'' = 0. \tag{3}$$

Puis, utilisant un résultat établi précédemment, il écrit que la droite cherchée rencontre les deux droites données, à l'aide des deux équations:

$$(\mu\,n' - \mu'\,n)\,(m'\,n - m\,n') = (n\,\lambda' - n'\,\lambda)\,(l'\,n - l\,n'), \tag{4}$$

$$(\mu\,n'' - \mu''\,n)\,(m''\,n - m\,n'') = (n\,\lambda'' - n''\,\lambda)\,(l''\,n - l\,n''). \tag{5}$$

Disposant habilement de n, il détermine l, m et n à l'aide des équations (2) et (3):

$$l = m'\,n'' - m''\,n' \qquad m = n'\,l'' - n''\,l', \qquad n = l'\,m'' - l''\,m'$$

et désigne les seconds membres de ces égalités par les lettres L, M, N. Il développe ensuite les équations (4) et (5) et, grâce à des notations bien choisies, obtient rapidement les valeurs de λ, μ, ν, en fonction des données et de la plus courte distance Q, dont il donne la valeur sous forme symétrique:

$$Q = -\frac{l'\lambda'' + m'\mu'' + n'\nu'' + l''\lambda' + m''\mu' + n''\nu'}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

On constate, sur cet exemple, la maîtrise avec laquelle MONGE manie les nouvelles notations qu'il avait créées. Mais son étude était destinée à des jeunes gens qui, entrant à l'Ecole polytechnique, s'initiaient en quelque sorte à cette géométrie analytique moderne que MONGE venait de créer; et il est probable que, du point de vue pédagogique, l'emploi immédiat de ces nouvelles notations ne donna pas les meilleurs résultats. Aussi, dès 1805, MONGE abandonna-t-il ces coordonnées axiales et revint-il à une méthode, moins originale, mais peut-être mieux adaptée à la compétence de ses lecteurs, dans une courte étude d'ensemble des problèmes de géométrie analytique du premier et du second degré qu'il publia en collaboration avec HACHETTE[1]). Cette étude se trouve republiée comme première partie de la 3e édition de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* (1807), et il est probable que les historiens de la géométrie, faute de trouver aisément les deux premières éditions de ce traité, ont pensé, à tort

---

1) G. MONGE et J.-N.-P. HACHETTE, *Application de l'Algèbre à la Géométrie des surfaces du premier et du second degré, à l'usage de l'Ecole polytechnique*, in-4° (Paris, an XIII [1805]), IV + 56 pp., avec une planche.

il est vrai, que les éléments de géométrie analytique insérés dans ces éditions ne pouvaient rien contenir qui ne se trouvât dans la troisième.

Les précisions que nous avons données montrent l'importance du rôle joué par MONGE dans la création des coordonnées axiales de la droite. S'il n'appliqua pas, comme PLÜCKER le fit en 1865, ces coordonnées à l'étude de la géométrie réglée et des systèmes de forces, il faut néanmoins noter que c'est à lui que l'on doit la première étude des congruences de droites et en particulier des congruences de normales, et qu'il est passé très près de la considération des complexes de droites dans son *Traité élémentaire de statique*[1]).

Pour conclure, nous poserons deux questions:

L'expression classique de «coordonnées pluckériennes» mérite-t-elle vraiment de s'appliquer aux coordonnées axiales de la droite?

Est-il certain que PLÜCKER, qui connaissait très bien l'œuvre de MONGE et qui se considérait comme un de ses disciples, n'ait lu ni son important mémoire sur les développées, ni l'une des deux premières éditions de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*?

RENÉ TATON, Paris.

Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen

J.-P. SYDLER hat in dieser Zeitschrift[2]) eine Methode angegeben, um in einem gegebenen Punkt eines Kegelschnittes den Krümmungskreis zu konstruieren. In Abweichung von dieser Methode, bei der unter anderem Gebrauch gemacht wird von den Eigenschaften der projektiven Punktreihen, folgen hier einige Konstruktionen – worunter die Konstruktion des Krümmungskreises in einem Punkt eines Kegelschnittes –, die auf den bekannten Sätzen von STURM und PASCAL beruhen.

I. *Satz von Sturm.* Haben drei Kegelschnitte zwei Punkte gemeinsam, so gehen die drei Verbindungsgeraden der übrigen Punkte, die sie zu je zweien gemeinsam haben, durch einen Punkt (Punkt von STURM).

Beweis. Wir denken uns die drei Kegelschnitte durch eine komplexe projektive Transformation aus drei Kreisen entstanden. Die zwei isotropen Punkte gehen dabei in zwei gemeinsame Punkte über, während das Potenzzentrum in den Punkt von STURM übergeht.

II. Der *Satz von Pascal* kann in folgender Weise aus dem Satz von STURM abgeleitet werden (siehe Figur 1): Auf einem Kegelschnitt K_1 seien sechs Punkte A_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) gegeben. Wir betrachten nun die Verbindungsgeraden A_1A_6 und A_2A_3 als entarteten Kegelschnitt K_2; die Verbindungsgeraden A_3A_4 und A_5A_6 als entarteten Kegelschnitt K_3. Die Kegelschnitte K_1, K_2 und K_3 haben die Punkte A_3 und A_6 gemeinsam, und die beiden entarteten Kegelschnitte schneiden sich außer

[1]) Pour toutes les questions annexes, on pourra consulter nos deux études: R. TATON, *Gaspard Monge*, Beih. El. Math., n° 9 (Birkhäuser, Bâle 1950); *L'Œuvre scientifique de Monge* (Presses Universitaires de France, Paris 1951).

[2]) J.-P. SYDLER, *Construction à l'aide de la règle et de l'équerre du diamètre de courbure en un point d'une conique*, El. Math. *5*, 49 (1950).