

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	6 (1951)
<b>Heft:</b>	6
 <b>Artikel:</b>	Die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte im komplexen Gebiet
<b>Autor:</b>	Hohenberg, Fritz
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-15581">https://doi.org/10.5169/seals-15581</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.      Band VI      Nr. 6      Seiten 121–144      Basel, 15. November 1951

---

## Die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte im komplexen Gebiet

Ellipse und Hyperbel hängen durch eine komplexe Affinität zusammen. In ihren Brennpunktseigenschaften (zum Beispiel konstante Leitstrahlsumme bzw. -differenz) kommt aber nicht unmittelbar zum Ausdruck, daß sie im Komplexen eng verwandt sind. Daß dennoch Zusammenhänge bestehen, zeigen die folgenden Betrachtungen.

Zunächst ergibt sich, daß die elementaren Definitionen der Kegelschnitte nur beschränkte Gültigkeit im komplexen Gebiet haben. Hierauf werden die Eigenschaften der komplexen Brennpunkte aufgesucht. Auch die nullteiligen Kegelschnitte werden betrachtet. Schließlich wird der Ort der Punkte konstanter Leitstrahlsumme bzw. -differenz untersucht, wenn statt zweier Brennpunkte eine endliche Anzahl von Brennpunkten vorliegt.

Diese Untersuchungen sind auch erforderlich, um gewisse scheinbare Widersprüche zu klären. Zum Beispiel ist für die komplexen Schnittpunkte einer Hyperbel mit ihrer imaginären Achse die Leitstrahldifferenz nicht  $2a$ , sondern Null, da die imaginäre Achse die Streckensymmetrale der Brennpunkte ist. Und für die komplexen Fernpunkte einer Ellipse ist die Leitstrahlsumme nicht  $2a$ , sondern unendlich groß. Schon diese Beispiele zeigen, daß die übliche Betrachtungsweise unzulänglich ist.

### 1. Konstante Leitstrahlsumme oder -differenz

$x$  und  $y$  seien die kartesischen Koordinaten eines Punktes  $P$ ,  $d_1$  und  $d_2$  seine Abstände von den reellen Brennpunkten  $F_1(e, 0)$  und  $F_2(-e, 0)$ . Wir suchen den Ort der Punkte, für die

$$\underline{\pm d_1 \pm d_2 = 2a} \quad (1)$$

ist, wo  $a$  eine reelle Konstante bedeutet. Es ist also

$$\pm \sqrt{(x - e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a. \quad (2)$$

Hieraus folgt — unabhängig von der in (1) gewählten Vorzeichenkombination — durch zweimaliges Quadrieren:

$$(a^2 - e^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2). \quad (3)$$

Diese Gleichung zweiten Grades stellt eine notwendige Bedingung dar; das heißt, wenn  $P$  eine der vier Relationen (1) erfüllt, genügen seine Koordinaten (3). Nun ist zu untersuchen, ob (3) auch hinreichend ist, das heißt, ob ein Punkt, der (3) genügt, eine Relation (1) erfüllt.

Setzt man  $e/a = \varepsilon$  und eliminiert  $y$  mittels (3), so folgt

$$d_1 = \pm (a - \varepsilon x), \quad d_2 = \pm (a + \varepsilon x). \quad (4)$$

Ist  $x$  komplex, dann sind  $d_1$  und  $d_2$  komplex, und beide Vorzeichen von  $d_1$  bzw.  $d_2$  sind gleichberechtigt. Man kann sie stets so wählen, daß für einen bestimmten Kurvenpunkt entweder  $d_1 + d_2$  oder  $d_1 - d_2$  oder  $-d_1 + d_2$  oder  $-d_1 - d_2$  den Wert  $2a$  hat.

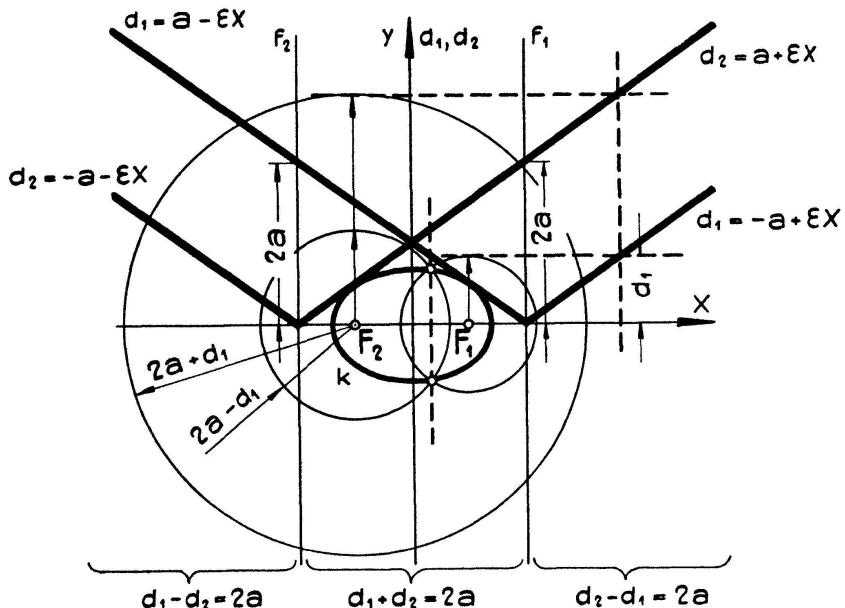


Fig. 1

Ist dagegen  $x$  eine beliebige reelle Zahl, so sind  $d_1$  und  $d_2$  reell, und man kann die Vorzeichen in (4) so normieren, daß  $d_1$  und  $d_2$  positiv sind. Wir setzen für das folgende

$$\frac{a^2}{e} = f. \quad (5)$$

$x = f$  stellt bekanntlich die zu  $F_1$  gehörige Leitlinie  $f_1$  des Kegelschnitts dar, das heißt die Polare von  $F_1$ . Ebenso ist  $x = -f$  die zu  $F_2$  gehörige Leitlinie  $f_2$ . Wegen (4) ist  $d_1 = a - \varepsilon x \geq 0$ , wenn  $x \leq f$ , und  $d_1 = -a + \varepsilon x \geq 0$ , wenn  $x \geq f$  ist. Ebenso ist  $d_2 = -a - \varepsilon x \geq 0$ , wenn  $x \leq -f$ , und  $d_2 = a + \varepsilon x \geq 0$ , wenn  $x \geq -f$ . Dies zeigt, daß ein Kurvenpunkt mit reellem  $x$  im allgemeinen nur eine einzige Relation (1) erfüllt; es gilt (unabhängig vom Wert, den  $y$  annimmt):

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= 2a, & \text{wenn } x \leq -f, \\ d_1 + d_2 &= 2a, & \text{wenn } -f \leq x \leq f, \\ -d_1 + d_2 &= 2a, & \text{wenn } f \leq x. \end{aligned} \quad (6)$$

Für die Punkte mit  $x = f$  ist  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 2a$ , daher  $d_1 + d_2 = 2a$  und zugleich  $-d_1 + d_2 = 2a$ ; analog für die Punkte mit  $x = -f$ .

In Figur 1 sind  $d_1$  und  $d_2$  für eine Ellipse ( $a > e$ ) als Funktionen von  $x$  aufgetragen<sup>1)</sup>. Die Figur zeigt, daß im Grenzfall auch für die komplexen Fernpunkte der Ellipse  $|d_1 - d_2| = 2a$  ist. Für eine Hyperbel ergibt sich eine analoge Figur. Für die komplexen Scheitel der Hyperbel ist  $d_1 = d_2 = a$ ,  $d_1 + d_2 = 2a$ .

Die Kurvenpunkte mit reellem  $x$  ergeben sich daher als (reelle oder komplexe) Schnittpunkte je zweier reeller (das heißt einteiliger) Kreise  $(F_1, d_1)$  und  $(F_2, d_2)$  (das heißt Mitte  $F_m$ , Radius  $d_m$ ,  $m = 1, 2$ ). Dabei entsprechen einem Kreis  $(F_1, d_1)$  zwei Kreise um  $F_2$ , nämlich  $(F_2, |2a - d_1|)$  und  $(F_2, 2a + d_1)$ , wie Figur 1 (gestrichelte

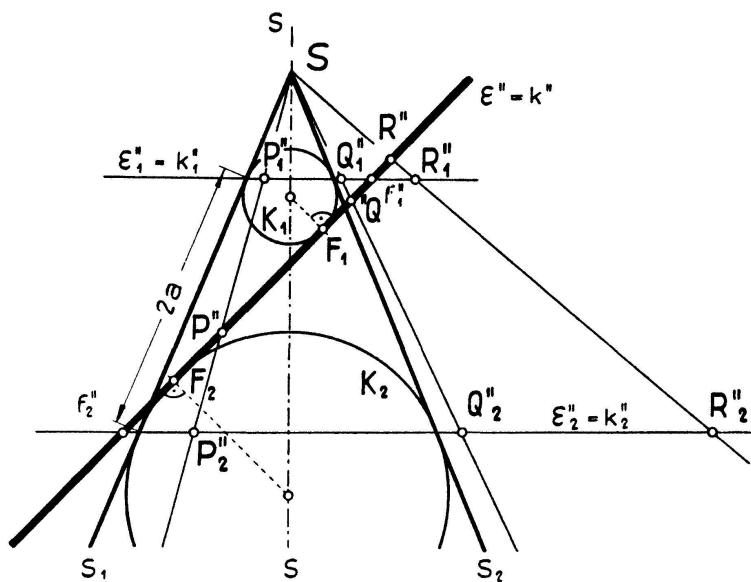


Fig. 2

Linien) zeigt.  $d_1$  nimmt hier jeden nichtnegativen reellen Wert an, insbesondere entspricht dem Nullkreis  $(F_1, 0)$  der Leitkreis  $(F_2, 2a)$ , die zugehörigen konjugiert komplexen Kurvenpunkte liegen auf  $f_1$ . Ebenso liegen die Schnittpunkte von  $(F_1, 2a)$  und  $(F_2, 0)$  auf  $f_2$ .

Zu den Punkten mit reellem  $x$  gehören auch die reellen Kurvenpunkte. Aus (3) folgt

$$y^2 = (1 - \varepsilon^2) (a^2 - x^2). \quad (7)$$

Das ergibt die Unterscheidung in Ellipsen ( $\varepsilon < 1$ ,  $|x| \leq a$ ) und Hyperbeln ( $\varepsilon > 1$ ,  $|x| \geq a$ ).

Die Gleichungen (6) lassen sich auch an der Dandelinischen Beweisfigur synthetisch herleiten (Figur 2). Ein Drehkegel mit der Spitze  $S$ , dessen Achse  $s$  und dessen Erzeugenden  $s_1$  und  $s_2$  in der Bildebene liegen, werde von der projizierenden Ebene  $\varepsilon$  (Spur  $\varepsilon''$ ) zum Beispiel nach einer Ellipse  $k$  geschnitten (für eine Hyperbel gelten dieselben Überlegungen). Die Dandelinischen Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  berühren  $\varepsilon$  in den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  von  $k$  und berühren den Kegel längs der Parallelkreise  $k_1$  und  $k_2$ ,

<sup>1)</sup> Die Bildgeraden dieser linearen Funktionen sind übrigens Tangenten des Kegelschnitts (in den Punkten mit  $x = \pm e$ ).

die in den Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  liegen. Der Normalriß von  $k_1$  bzw.  $k_2$  besteht bekanntlich, wenn man die komplexen Punkte des Kreises mit einbezieht, nicht nur aus einer Strecke, sondern aus allen reellen und komplexen Punkten der Geraden  $\varepsilon_1''$  bzw.  $\varepsilon_2''$ . Für einen reellen Ellipsenpunkt  $P$  folgt in bekannter Weise  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ . Ist  $Q$  ein komplexer Ellipsenpunkt mit reellem  $x$ , so ist sein Normalriß ein reeller Punkt  $Q''$  auf  $\varepsilon'' = k''$ .  $Q''$  liege zum Beispiel zwischen  $f_1''$  und  $s_2$ . Die Kegelerzeugende durch  $Q$  hat den reellen Riß  $[SQ'']$ , ihr komplexer Schnittpunkt mit  $k_1$  bzw.  $k_2$  hat den reellen Riß  $Q_1''$  auf  $\varepsilon_1'' = k_1''$  bzw.  $Q_2''$  auf  $\varepsilon_2'' = k_2''$ . Da alle Tangenten aus  $Q$  an  $K_1$  gleich lang sind, ist  $d_1 = \overline{QF_1} = \overline{QQ_1}$ . Ebenso ist  $d_2 = \overline{QF_2} = \overline{QQ_2}$ , daher  $d_1 + d_2 = \overline{Q_1Q_2} = 2a$  (denn  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  schneiden aus jeder Erzeugenden die Strecke

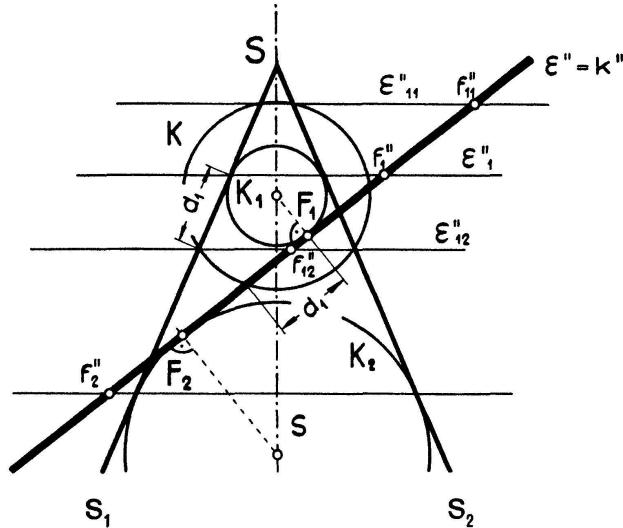


Fig. 3

$2a$ ). Ist  $R$  ein komplexer Ellipsenpunkt mit reellem  $x$ , dessen reeller Riß  $R''$  oberhalb  $\varepsilon_1''$  auf  $\varepsilon''$  liegt, so folgt ebenso  $d_2 - d_1 = \overline{R_1R_2} = 2a$ . Die Ellipsenpunkte mit reellem  $x$  und  $d_1 - d_2 = 2a$  haben ihren Normalriß unterhalb  $\varepsilon_2''$ .

Ist für einen Kurvenpunkt jedoch  $x$  komplex, so ist sein Normalriß nicht reell, und man kann nicht sagen, ob er oberhalb oder unterhalb  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  liegt. Daher gelten für einen solchen Punkt beide Vorzeichen von  $d_1$  und  $d_2$ , und er erfüllt alle vier Relationen (1).

## 2. Konstantes Verhältnis der Abstände von Brennpunkt und Leitlinie

Der Abstand eines Kurvenpunktes  $P(x, y)$  von der Leitlinie  $f_1(x = f)$  bzw.  $f_2(x = -f)$  heiße  $d'_1$  bzw.  $d'_2$ . Es ist bekanntlich

$$\underline{|d_m: d'_m| = \varepsilon.} \quad (m = 1, 2) \quad (8)$$

Da (8) zum Beispiel für  $m = 1$ , in Koordinaten ausgedrückt,

$$\sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2} = \pm \frac{e}{a} \left( x - \frac{a^2}{e} \right) \quad (9)$$

lautet und diese Gleichung quadriert wird, gehören zu einem Wert  $d_1$  zwei entgegen-

gesetzt gleiche Werte  $d'_1$ , das heißt, die vier Schnittpunkte eines Kreises  $(F_1, d_1)$  mit dem Kegelschnitt liegen auf zwei zu  $f_1$  symmetrischen Geraden. Dies gilt im Grenzfall  $\varepsilon = 1$  auch für die Parabel. Ist  $d_1$  reell, so sind diese vier Punkte zugleich die Schnittpunkte des Kreises  $(F_1, d_1)$  mit den beiden Kreisen  $(F_2, 2a + d_1)$  und  $(F_2, |2a - d_1|)$ .

Dies lässt sich auch an der Dandelinischen Beweisfigur verfolgen (Figur 3). Eine zu  $K_1$  konzentrische Kugel  $K$  schneidet  $\varepsilon$  nach einem Kreis. Sie schneidet den Kegel nach zwei Parallelkreisen. Deren Ebenen  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{12}$  liegen symmetrisch zu  $\varepsilon_1$ , denn  $\varepsilon''$  und  $s_1$  (oder  $s_2$ ) sind Tangenten des Umrisses von  $K_1$ , und die zu  $K_1$  konzentrische Kugel  $K$  schneidet auf diesen Geraden dieselbe Streckenlänge  $2d_1$  aus. Die in  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{12}$  liegenden Parallelkreise des Kegels schneiden daher  $\varepsilon$  in zwei zu  $f_1$  symmetrischen und parallelen Geraden  $f_{11}$  und  $f_{12}$ , deren Schnittpunkte mit dem zugehörigen Parallelkreis dem Kegelschnitt angehören.

### 3. Konstantes Produkt der Brennpunktsabstände der Tangenten

Der Kegelschnitt (3) lässt sich als Punktort durch die Forderung (1) oder auch durch (8) charakterisieren. Bezeichnen  $t_1$  und  $t_2$  die Abstände einer Kegelschnittstangente von  $F_1$  bzw.  $F_2$ , so lässt er sich als Tangentenort durch die Forderung

$$\underline{t_1 t_2 = a^2 - e^2} \quad (10)$$

festlegen, denn die Tangente im Punkt  $(x, y)$  des Kegelschnitts lautet in der Hesseschen Normalform wegen (3):

$$\frac{(a^2 - e^2) x \xi + a^2 y \eta - a^2 (a^2 - e^2)}{\sqrt{a^2 - e^2} \sqrt{a^4 - e^2 x^2}} = 0$$

(laufende Koordinaten  $\xi, \eta$ ). Daher ist

$$t_1 = \sqrt{a^2 - e^2} \sqrt{\frac{f - x}{f + x}}, \quad t_2 = \sqrt{a^2 - e^2} \sqrt{\frac{f + x}{f - x}}, \quad (11)$$

und hieraus folgt (10). Sind  $t_1$  und  $t_2$  komplex, so können die Wurzeln in (11) beiderlei Vorzeichen erhalten. Zum Beispiel folgt, wenn  $x \rightarrow \infty$ , für die konjugiert komplexen Asymptoten einer Ellipse  $t_1 = t_2 = \pm i \sqrt{a^2 - e^2}$ .

Ist die Tangente aber reell, so sind  $t_1$  und  $t_2$  reell, und man wählt die Vorzeichen gleich oder ungleich, je nachdem  $F_1$  und  $F_2$  auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. Zur Abszisse  $x$  gehören dann zwei reelle Tangenten. Sie sind bei der Ellipse die äußeren und bei der Hyperbel die inneren gemeinsamen Tangenten der Kreise  $(F_1, t_1)$  und  $(F_2, t_2)$ . Die Berührungs punkte dieser Tangenten mit den beiden Kreisen liegen auf dem großen Scheitelpunkt des Kegelschnitts. [Die übrigen gemeinsamen Tangenten beider Kreise umhüllen den durch  $t_1 t_2 = -(a^2 - e^2)$  bestimmten Kegelschnitt; dieser hat dieselben Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  und die große Halbachse  $\sqrt{2(e^2 - a^2)}$ ].

$t_1$  und  $t_2$  können aber auch reell sein, ohne daß die zugehörigen Tangenten reell sind. Bei der Ellipse tritt dies für  $a < |x| < f$ , bei der Hyperbel für  $f < |x| < a$  ein.

Zur Abszisse  $x$  gehören dann zwei konjugiert komplexe Tangenten, die sich im äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $(F_1, t_1)$  und  $(F_2, t_2)$  schneiden.

Aus (4) und (11) folgt überdies

$$t_1 = \sqrt{a^2 - e^2} \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}, \quad t_2 = \sqrt{a^2 - e^2} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}, \quad t_1 : t_2 = d_1 : d_2. \quad (12)$$

#### 4. Beziehungen zu den komplexen Brennpunkten

In der projektiven Geometrie betrachtet man neben den reellen Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  die konjugiert komplexe Brennpunkte  $F_3(0, e i)$  und  $F_4(0, -e i)$  der Ellipse oder Hyperbel. Es scheint nicht bekannt zu sein, daß  $F_3$  und  $F_4$  ähnliche metrische Eigenschaften wie  $F_1$  und  $F_2$  haben.

1. Für die Abstände eines Kurvenpunktes von  $F_3$  und  $F_4$  ergibt sich wegen (3):

$$d_3 = \pm \frac{a^2 - e^2 - e i y}{\sqrt{a^2 - e^2}}, \quad d_4 = \pm \frac{a^2 - e^2 + e i y}{\sqrt{a^2 - e^2}}. \quad (13)$$

Daraus folgt als Seitenstück zu (1) die Beziehung

$$\underline{\pm d_3 \pm d_4 = 2 \sqrt{a^2 - e^2}}. \quad (14)$$

Berechnet man  $x$  aus (4) und  $y$  aus (13), so ergibt sich durch Einsetzen in (3) auch eine Beziehung zwischen  $d_1$  (oder  $d_2$ ) und  $d_3$  (oder  $d_4$ ),

$$(d_m \pm a)^2 - (d_n \pm \sqrt{a^2 - e^2})^2 = e^2. \quad (m = 1, 2; n = 3, 4) \quad (15)$$

2.  $F_3$  hat als Polare  $f_3$  die komplexe Leitlinie  $y = -i(f - e)$ , zu  $F_4$  gehört als Polare  $f_4$  die konjugiert komplexe Leitlinie  $y = i(f - e)$ .  $d'_3$  bzw.  $d'_4$  seien die Abstände eines Kurvenpunktes von  $f_3$  bzw.  $f_4$ . Es folgt wie in 2., daß auch die Verhältnisse  $d_n : d'_n$  ( $n = 3, 4$ ) konstant sind,

$$\underline{|d_n : d'_n| = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}}. \quad (n = 3, 4) \quad (16)$$

Dieses Verhältnis ist bei einer Ellipse rein imaginär, bei einer Hyperbel ist es reell, und zwar  $> 1$ .

3. Die Hessesche Normalform der Tangente kann wegen (3) auch in der Form

$$\frac{(a^2 - e^2) x \xi + a^2 y \eta - a^2 (a^2 - e^2)}{a \sqrt{(a^2 - e^2)^2 + e^2 y^2}} = 0$$

geschrieben werden. Für die Abstände  $t_3$  und  $t_4$  der Brennpunkte  $F_3$  und  $F_4$  von der Tangente des Punktes  $(x, y)$  folgt

$$t_3 = a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 - e i y}{a^2 - e^2 + e i y}}, \quad t_4 = a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 + e i y}{a^2 - e^2 - e i y}}. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich als Seitenstück zu (10) die Beziehung

$$\underline{t_3 t_4 = a^2}. \quad (18)$$

Auch zwischen  $t_1$  (oder  $t_2$ ) und  $t_3$  (oder  $t_4$ ) ergibt sich eine Beziehung, wenn man  $x$  aus (11) und  $y$  aus (17) ausdrückt und in (3) einsetzt. Sie lautet

$$a^2 \left( \frac{a^2 - e^2 - t_m^2}{a^2 - e^2 + t_m^2} \right)^2 - (a^2 - e^2) \left( \frac{a^2 - t_n^2}{a^2 + t_n^2} \right)^2 = e^2. \quad (m = 1, 2; n = 3, 4) \quad (19)$$

### 5. Nullteilige Kegelschnitte

Bisher waren  $e$  und  $a$  reell vorausgesetzt. Ist  $e$  reell, aber  $a$  rein imaginär, so ist der durch (1) bestimmte Kegelschnitt nullteilig. Setzt man

$$\begin{aligned} a &= i a', \quad e = \frac{e}{a} = -\frac{e}{a'} i = -\varepsilon' i, \\ f &= \frac{a^2}{e} = -\frac{a'^2}{e} = -f', \end{aligned} \quad (a', \varepsilon', f' \text{ positiv reell}) \quad (20)$$

so lauten die Gleichungen (1), (3) und (4) nunmehr

$$\pm d_1 \pm d_2 = 2 i a', \quad (1')$$

$$(a'^2 + e^2) x^2 + a'^2 y^2 + a'^2 (a'^2 + e^2) = 0, \quad (3')$$

$$d_1 = \pm i (a_1 + \varepsilon_1 x), \quad d_2 = \pm i (a_1 - \varepsilon_1 x). \quad (4')$$

Für komplexes  $x$  sind in (4') beide Vorzeichen gleichberechtigt. Für reelles  $x$  sind  $d_1$  und  $d_2$  rein imaginär, und man kann die Vorzeichen in (4') so normieren, daß  $d_1$  und  $d_2$  positiv imaginär sind. (Man darf hier von «positiv imaginären» Zahlen sprechen, weil diese Zahlen im folgenden nur addiert oder subtrahiert werden.) Es ist dann

$$\begin{aligned} -d_1 + d_2 &= 2 i a', \quad \text{wenn } x \leq -f, \\ d_1 + d_2 &= 2 i a', \quad \text{wenn } -f \leq x \leq f, \\ d_1 - d_2 &= 2 i a', \quad \text{wenn } f \leq x. \end{aligned} \quad (6')$$

Durch eine geeignete Abänderung der Dandelin'schen Beweisfigur läßt sich dies auch synthetisch herleiten. In Figur 4 stehen dieselben Bezeichnungen wie in Figur 2. Die Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  schneiden sich hier reell, ihr innerer Ähnlichkeitspunkt sei die Kegelspitze  $S$ , eine äußere gemeinsame Tangentialebene (projizierend) sei die schneidende Ebene  $\varepsilon$ . Dann ist der Drehkegel nullteilig, und die Berührungs Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  sind auch nullteilig. Ihre Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  sind die Polarebenen von  $S$  bezüglich  $K_1$  und  $K_2$ .  $\varepsilon$  schneidet den Kegel nach einem nullteiligen Kegelschnitt  $k$ .

Hat ein Punkt  $R$  von  $k$  ein reelles  $x$ , so ist sein Normalriß  $R''$  ein reeller Punkt auf  $\varepsilon'' = k''$ .  $R''$  liege zum Beispiel oberhalb  $\varepsilon_2''$ .  $\overline{RF_1}$  ist die Tangentenlänge aus  $R$  an  $K_1$ ;

sie kann auch längs der durch  $R$  gehenden Kegelerzeugenden von  $R$  bis zum Schnittpunkt  $R_1$  mit dem nullteiligen Berührungsreich  $k_1$  in  $\varepsilon_1$  gemessen werden. Dabei ist die Streckenlänge  $\overline{SR_1}$  gleich der Wurzel aus der (negativen) Potenz von  $S$  bezüglich  $K_1$ . Da die Kegelerzeugende durch  $R$  einen reellen Normalriß hat und die Ebenen  $K_1$  und  $\varepsilon_2$  auf jeder Kegelerzeugenden eine Strecke konstanter Länge ausschneiden, ist  $d_1 - d_2 = \overline{RF_1} - \overline{RF_2} = \overline{RR_1} - \overline{RR_2} = \overline{R_1R_2} = \text{const.}$  Diese konstante, rein imaginäre Streckendifferenz  $2i a'$  ist in der Figur durch die reelle Strecke  $2a'$  gekennzeichnet, die von den Kugelumrissen auf einer horizontalen Geraden durch  $S$  ausgeschnitten wird.

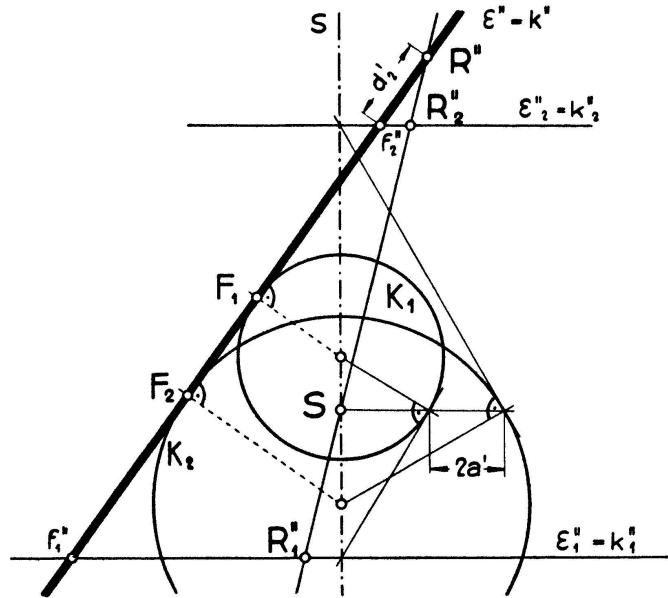


Fig. 4

Aus der Figur ergibt sich auch, daß

$$d_m : d'_m = \varepsilon \quad (m = 1, 2) \quad (8')$$

ist. Dabei sind die reellen Strecken  $d'_m$  in wahrer Größe gegeben,  $d'_m = \overline{R''f''_m}$ .

Ferner ergeben sich die Beziehungen

$$\pm d_3 \pm d_4 = 2i \sqrt{a'^2 + e^2}, \quad (14')$$

$$d_n : d'_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon'^2 + 1}}, \quad (\text{reell, } < 1; n = 3, 4) \quad (16')$$

$$t_1 t_2 = -a'^2 - e^2, \quad t_3 t_4 = -a'^2. \quad (10', 18')$$

## 6. Der volle geometrische Ort $\pm d_1 \pm d_2 = 2a$

Ellipsen, Hyperbeln und nullteilige Kegelschnitte lassen sich durch jede der gefundenen Eigenschaften definieren. Die Definition (8) hat den Vorteil, daß sie für  $\varepsilon = 1$  auch den Fall der Parabel umfaßt. Es soll zum Schluß gezeigt werden, daß die Definitionen (1) und (14) den Nachteil haben, daß die durch sie bestimmten geometrischen

Orter nicht nur aus einem Kegelschnitt, sondern noch aus der doppelt gezählten Ferngeraden bestehen. Führt man in (2) homogene kartesische Koordinaten

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad (21)$$

ein, so lautet (2)

$$\pm \sqrt{(x_1 - e x_0)^2 + x_2^2} \pm \sqrt{(x_1 + e x_0)^2 + x_2^2} = 2 a x_0.$$

Hieraus folgt durch zweimaliges Quadrieren

$$x_0^2 [a^2 (e^2 - a^2) x_0^2 + (a^2 - e^2) x_1^2 + a^2 x_2^2] = 0. \quad (22)$$

Der volle geometrische Ort (1) besteht daher aus dem Kegelschnitt (3) und aus der doppelt gezählten Ferngeraden  $x_0 = 0$ . Für die Punkte der Ferngeraden ist die Relation  $|d_1 - d_2| = 2 a$  in der Weise erfüllt, daß  $d_1$  und  $d_2$  unendlich groß sind und ihre Differenz unbestimmt wird<sup>1)</sup>.

Dies ist von Bedeutung, wenn man den Ansatz (1) auf  $n$  Brennpunkte  $F_1, F_2, \dots, F_n$  in der Ebene oder im Raum erweitert und nach dem Ort der Punkte fragt, für die

$$\underline{\pm d_1 \pm d_2 \pm \dots \pm d_n = n a} \quad (a \text{ konstant, natürliche Zahl } n) \quad (23)$$

ist.  $n = 1$  ergibt den Kreis bzw. die Kugel um  $F_1$  mit dem Radius  $a$ ,  $n = 2$  ergibt einen Kegelschnitt bzw. eine Drehfläche zweiten Grades, dazu die doppelt gezählte Ferngerade bzw. Fernebene. Für  $n = 3$  ergibt sich eine Kurve bzw. Fläche achter Ordnung<sup>2)</sup>. Für  $n = 4$  erhält man eine Kurve bzw. Fläche 10. Ordnung<sup>3)</sup>, dazu die sechsfach gezählte Ferngerade bzw. Fernebene. Allgemein bedeutet (23) für ungerades  $n$  eine Kurve bzw. Fläche von der Ordnung  $2^n$ . Für gerades  $n$  spaltet sich die Ferngerade bzw. Fernebene ab, und es bleibt eine Kurve bzw. Fläche von der Ordnung

$$2^n - \binom{n}{n/2}.$$

FRITZ HOHENBERG, Graz.

## Kleine Mitteilungen

### I. Bemerkung zur elementaren Konvergenzlehre

In vielen Darstellungen der Theorie der konvergenten Zahlfolgen stößt man auf eine gewisse Unklarheit, die ihren Grund darin hat, daß der Begriff des Häufungspunktes in nicht ganz angemessener Weise gebraucht wird. Bei näherem Zusehen kann man feststellen, daß dieser unangemessene Gebrauch verursacht wird durch die Gepflogenheit, eine Zahlfolge als Spezialfall einer Punktmenge zu interpretieren. Diese Interpretation ist aber nicht genau zutreffend und erzeugt eine leichte Verwirrung, die gerade einem kritischen Anfänger Unbehagen bereiten kann.

<sup>1)</sup> Analog besteht der geometrische Ort (1) in der nichteuklidischen Geometrie aus einem Kegelschnitt und dem absoluten Kegelschnitt.

<sup>2)</sup> Siehe F. HOHENBERG, *Eine einfache Fläche 8. Ordnung*, Mh. Math. 54, 140–156 (1950). Es zeigt sich unter anderem, daß diese Fläche durch die sogenannte Darbouxsche Verwandtschaft mit der bekannten Steinerschen Fläche vierter Ordnung zusammenhängt.

<sup>3)</sup> Eine Untersuchung dieser Fläche soll demnächst erscheinen.