Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1951)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Durch Elimination von f ergibt sich:

$$\varepsilon^2 = \left(1 - \frac{v_0^2}{g_0 r_0}\right)^2.$$

Die Elimination von ε liefert:

$$f_1 = r_0 \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{r_0 v_0^2}{2 g_0 r_0 - v_0^2}.$$

f_1 ist also der Abstand des einen Scheitelpunktes der Bahn (unser Anfangspunkt) vom Zentralkörper M und f_2 der Abstand des andern Scheitelpunktes von M.

ADOLF GIGER, Solothurn.

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Bemerkung zur Kreisteilung*

Im Jubiläumsheft[1]) zum zehnjährigen Bestehen der ausgezeichneten mathematisch-naturwissenschaftlichen Zeitschrift *Euclides* (Madrid), auf die wir bei dieser Gelegenheit gerne hinweisen möchten, beweist J. BARINAGA die hübsche Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$$

Er verwendet dazu den Wert einer «Gaußschen Summe», der allerdings dort auf elementarem Wege gewonnen wird. Die folgende Verifikation ergibt sich unmittelbar aus dem Moivreschen Satz.

Setzen wir $z = e^{2\pi i/11}$ und verwenden die Darstellung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

so erhält die linke Seite unserer Beziehung die Form

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{z^3-1}{z^3+1} + \frac{2}{i}\cdot\frac{z^2-1}{z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{2z^5+z^4-2z^3+2z^2-z-2}{z(z^3+1)}.$$

Quadriert man den Zähler und berücksichtigt, daß $z^{10}+z^9+\cdots+z+1=0$, so ergibt sich der Wert $-11z^2(z^3+1)^2$, womit der Beweis geliefert ist.

Mit der Methode von BARINAGA lassen sich weitere ähnliche Beziehungen finden, zum Beispiel:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{7}; \qquad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{19} + 4\sin\frac{2\pi}{19} - 4\sin\frac{3\pi}{19} + 4\sin\frac{8\pi}{19} = \sqrt{19}.$$

Die Verifikation sei dem Leser überlassen.

E. TROST.

II. *Zwei nichtkonstruierbare Aufgaben des Dreiecks*

Die Konstruktion des Dreiecks mit Lineal und Zirkel aus den Abständen des Umkreismittelpunktes von den Seiten des Dreiecks oder aus den Abständen des Mittelpunktes eines Berührungskreises (des Inkreises oder eines Ankreises) von den Eckpunkten des Dreiecks ist im allgemeinen nicht möglich.

---

[1]) Vol. *11*, 114–115 (1951).

Beide Konstruktionen führen nämlich zu im allgemeinen irreduziblen Gleichungen dritten Grades.

Hat ein Dreieck ABC die Seiten a, b, c und die Winkel α, β, γ, so besteht die goniometrische Gleichung des Dreiecks

$$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0. \quad (\alpha+\beta+\gamma=\pi) \quad (1)$$

Diese Gleichung folgt aus den Gleichungen des Projektionssatzes:

$$b\cos\gamma+c\cos\beta-a=0, \qquad c\cos\alpha+a\cos\gamma-b=0, \qquad a\cos\beta+b\cos\alpha-c=0.$$

Diese Gleichungen sind in a, b und c linear und homogen, die Determinante der Koeffizienten von a, b und c muß also verschwinden.

Der Umkreisradius r und die Abstände d_1, d_2, d_3 des Umkreismittelpunktes von den Seiten genügen den Gleichungen:

$$d_1=r\cos\alpha, \qquad d_2=r\cos\beta, \qquad d_3=r\cos\gamma. \quad (2)$$

(Im Falle $\gamma \geqq \pi/2$ ist $d_3 \leqq 0$.) Auf Grund von (1) ist r eine Wurzel der Gleichung

$$x^3-(d_1^2+d_2^2+d_3^2)\,x-2\,d_1\,d_2\,d_3=0. \quad (3)$$

Bei einem Dreieck mit den Winkeln $(\pi-\alpha)/2$, $(\pi-\beta)/2$, $(\pi-\gamma)/2$ $(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$ hat die Gleichung (1) die Form:

$$1-\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0. \quad (4)$$

Der Inkreisradius ϱ und die Abstände e_1, e_2, e_3 des Inkreismittelpunktes von den Eckpunkten genügen den Gleichungen:

$$\varrho=e_1\sin\frac{\alpha}{2}=e_2\sin\frac{\beta}{2}=e_3\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (5)$$

Nach (4) ist $1/\varrho$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^3-\left(\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}+\frac{1}{e_3^2}\right)x-\frac{2}{e_1\,e_2\,e_3}=0. \quad (6)$$

Drückt man in (4) $\sin\beta/2$ und $\sin\gamma/2$ durch $\cos\beta/2$ und $\cos\gamma/2$ aus, so erhält man nach leichten Umformungen die Gleichung:

$$\left[1-\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\right]^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=0. \quad (7)$$

Bezeichnet O_1 bzw. ϱ_1 den Mittelpunkt bzw. den Halbmesser des ersten Ankreises (von dem die Seite BC von außen berührt wird) und sind $\overline{AO_1}=f_1$, $\overline{BO_1}=g_2$ und $\overline{CO_3}=g_3$, so gilt:

$$\varrho_1=f_1\sin\frac{\alpha}{2}=g_2\cos\frac{\beta}{2}=g_3\cos\frac{\gamma}{2}. \quad (8)$$

Aus (7) erhält man also für $x=\varrho_1^{-2}$ die Gleichung

$$x^3-2\,(f_1^{-2}+g_2^{-2}+g_3^{-2})\,x^2+(f_1^{-2}+g_2^{-2}+g_3^{-2})^2\,x-4\,f_1^{-2}\,g_2^{-2}\,g_3^{-2}=0. \quad (9)$$

Die Gleichung (3), (6) bzw. (9) ist im allgemeinen irreduzibel, z.B. bei $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=3$, bei $e_1=1$, $e_2=1/2$, $e_3=1/3$ bzw. bei $f_1^{-2}=1/3$, $g_2^{-2}=1/2$, $g_3^{-2}=1$, weil die betreffende Gleichung dann keine ganzzahlige Wurzel besitzt.

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen. Wäre nämlich das Dreieck aus d_1, d_2, d_3, aus e_1, e_2, e_3 bzw. aus f_1, g_2, g_3 im allgemeinen konstruierbar, so wäre auch r, ϱ bzw. ϱ_1 daraus konstruierbar. Dies ist aber unmöglich, wenn die Gleichungen (3), (6) bzw. (9) irreduzibel sind.

Hingegen läßt sich das Dreieck aus den Strecken $\overline{AO_1} = f_1$, $\overline{BO_2} = f_2$ und $\overline{CO_3} = f_3$ konstruieren, wo O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte der Ankreise sind. Dann sind

$$f_1 \cos\frac{\alpha}{2} = f_2 \cos\frac{\beta}{2} = f_3 \cos\frac{\gamma}{2} = s, \qquad 2\,s = a + b + c. \tag{10}$$

Wird jede Sinusfunktion in (4) durch die Kosinusfunktion ausgedrückt, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\alpha}{2} + \cos^4\frac{\beta}{2} + \cos^4\frac{\gamma}{2} - 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)&\\ + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} = 0.&\end{aligned} \tag{11}$$

Aus (11) und (10) folgt die Gleichung

$$4\,s^2 = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \left[2\left(\frac{1}{f_1^2 f_2^2} + \frac{1}{f_2^2 f_3^2} + \frac{1}{f_3^2 f_1^2}\right) - \left(\frac{1}{f_1^4} + \frac{1}{f_2^4} + \frac{1}{f_3^4}\right)\right].$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. GYULA V. SZ. NAGY, Szeged.

III. *Zur Herleitung des Additionstheorems der goniometrischen Funktionen*

Will man die Funktionen von Winkeln aller vier Quadranten sauber und sachgemäß erklären, muß man zweifellos gerichtete Gerade (Speere) in einer orientierten Ebene betrachten. Es ist unschwer, zu zeigen, daß für die Speere a, b, c (paarweise schneidend) $\widehat{ab} + \widehat{ba} = 4\,R$ und $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ca} = 4\,k\,R$ $(k = 1, 2)$ ist.

Ist $\overrightarrow{PQ}$ eine gerichtete Strecke auf dem Speer a und $\overrightarrow{P'Q'}$ die Normalprojektion dieser Strecke auf dem Speer b, dann erklärt man die Funktion $\cos\widehat{ab}$ durch die Gleichung $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}\cos\widehat{ab}$ und beweist leicht die Unabhängigkeit von der Strecke $\overrightarrow{PQ}$.

$$\cos\widehat{ba} = \cos\widehat{ab}, \qquad \cos(\widehat{ab} \pm 2\,R) + \cos\widehat{ab} = 0$$

und die Periode $4\,R$.

Die Funktion $\sin\widehat{ab}$ erklärt man dann durch

$$\sin\widehat{ab} = \cos(\widehat{ab} - R) = \cos(R - \widehat{ab}), \quad \text{findet} \quad \sin(\widehat{ab} + R) = \cos\widehat{ab},$$

$$\sin\widehat{ba} = \cos(R - \widehat{ba}) = \cos(\widehat{ab} - R + 2\,R) = -\cos(\widehat{ab} - R) = \sin\widehat{ab},$$

und ebenfalls die Periode $4\,R$.

Als letzte Vorbereitung beweist man den Satz:

Bilden die gerichteten Strecken l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf den Speeren s_i einen geschlossenen Streckenzug und sind l_i' die Normalprojektionen der Strecken l_i auf den Speer g, dann ist die Summe dieser Projektionen gleich Null[1]).

[1]) Die Anwendbarkeit des Projektionssatzes für geschlossene Streckenzüge in der rechnenden Geometrie, analytischen Geometrie und in der Mechanik ist so groß, daß es sich lohnt, diesen Satz möglichst früh einzureihen. Überdies gilt dieser Satz auch im Raum.

Ist (ABC) ein Dreieck, dann folgt man dem Vorbilde von MÖBIUS, indem man die Geraden $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ zu Speeren l, m, n macht. Man setzt dann $\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$, $\overrightarrow{AB} = c$, $\widehat{mn} = \alpha$, $\widehat{nl} = \beta$, $\widehat{lm} = \gamma$ und hat $\alpha + \beta + \gamma = 4\,k\,R$ $(k = 1, 2)$. Der geschlossene Streckenzug $[ABC]$ gibt durch Projektion auf den Speer l die Gleichung $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cos \widehat{lm} + \overrightarrow{AB} \cos ln = 0$ oder

$$a + b \cos\gamma + c \cos\beta = 0 \tag{1}$$

und zwei weitere Gleichungen durch zyklische Vertauschung.

Projiziert man den Streckenzug $[ABC]$ auf den Speer $h_1 \perp l$ $(\widehat{lh_1} = R)$, dann hat man

$$\overrightarrow{BC} \cos \widehat{h_1 l} + \overrightarrow{CA} \cos \widehat{h_1 m} + \overrightarrow{AB} \cos \widehat{h_1 n} = 0 \qquad \text{oder} \qquad c \sin\beta = b \sin\gamma .$$

Durch zyklische Vertauschung und Umformung erhält man

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} . \tag{2}$$

Mit (1) und (2) beherrscht man nun nicht nur die ganze ebene Trigonometrie, sondern auch in voller Allgemeinheit die Additionstheoreme.

Die Elimination der Strecken aus $c + a \cos\beta + b \cos\alpha = 0$ und (2) gibt

$$\sin\gamma + \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha = 0,$$

und wegen $\alpha + \beta + \gamma = 4\,k\,R$ ist

$$-\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta .$$

Wegen $\sin(\alpha + \beta') = \cos(\alpha + \beta' - R)$ setzt man $\beta' = \beta + R$ und erhält:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta .$$

Wegen $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ und $\cos(-\beta) = \cos\beta$ hat man:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta ,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

und

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 .$$

R. LAUFFER, Graz.

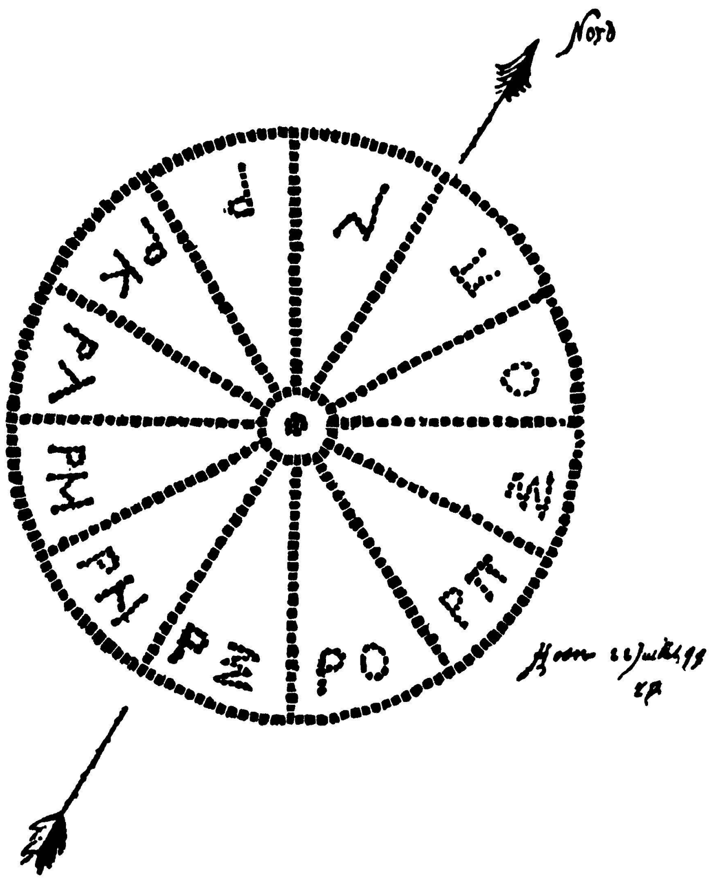
IV. *Ein Beitrag zur Geschichte der antiken Winkelmaße*

In der «*Revue biblique internationale*, publiée par l'Ecole pratique des études bibliques établie au couvent Saint-Etienne de Jérusalem» beschreibt Fr. P.-M. SÉJOURNÉ ein *antikes Mosaik*, das R. P. VINCENT DELAU in *Ḥosn*, einem Dorfe des Zehnstädtelandes (Ostsyrien), gesehen und aufgenommen hat[1]. Es handelt sich um eine sorgfältig zusammengesetzte und beschriftete Kreisfigur von 1,2 m Durchmesser (vergleiche die Abbildung). Hätte J. TROPFKE das Mosaik von Ḥosn gekannt, so würde er es sicher in der *Geschichte der Elementarmathematik* abgebildet haben, um seine kurzen Andeutungen über antike Winkelmaße urkundlich zu bestätigen. Einerseits betrifft es die Zahl 60 als Einheit, Grund- und Ausgangszahl, die man mit einem besonderen Wort, *Soß*, bezeichnete, und anderseits die Zerlegung des Viertelkreises in 30 Teile, was

[1] V. DELAU, Rev. biblique int. *9*, 118–121 (1900).

J. Tropfke aus der Bemerkung des griechischen Astronomen Aristarch von Samos «1/30 des Viertelkreises weniger als ein Viertelkreis» schließt[1]). Doch lassen wir vorerst Séjourné berichten:

«Cette figure assez originale nous a été remise sans aucune tentative d'interprétation ou d'explication. Après l'avoir souvent regardée, je me suis enfin décidé de la communiquer à la Société nationale des Antiquaires, dans la séance du 13 décembre 1899, et j'en ai proposé l'explication suivante. Les lettres représentent des nombres; en commençant par la lettre *Xi*, et en poursuivant par la lettre *omicron*, nous avons donc 60, 70, 80, 90, 100, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180[2]). La quatrième lettre, malgré sa



Das Mosaik von Ḥoṣn (nach Rev. biblique int. *9*, 119 [1900]).

forme irrégulière, est bien certainement un *koppa*. C'est une progression régulière par dizaines, à l'exception du nombre 110 qui fait défaut. Il n'en est pas moins vrai que chaque demi-circonférence se compose de 60 unités, et que le tout fait un total de 120, partant de 60 et allant jusqu'à 180. Etant admise cette manière d'inscrire les nombres dans les espaces blancs compris entre les lignes, il fallait nécessairement supprimer un nombre. Pour les exprimer tous, on aurait dû les écrire sur les lignes, et mettre sur la même le nombre de départ 60 et le nombre *terminus* 180. De cette façon, 60 et son double 120 eussent été sur les deux rayons se faisant face et partageant la circonférence en deux parties égales. Notons que, d'après l'orientation observée et indiquée par la flèche que P. Delau a ajoutée au dessin de la mosaïque, le point de départ 60 est situé exactement à l'est.

---

[1]) J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 1. Bd., 2. Aufl. (Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1921), S. 38/39.

[2]) Vgl. E. Löffler, *Ziffern und Ziffersysteme*, 1. Teil, 2. Aufl. (Teubner, Leipzig und Berlin 1918), S. 37.

Cette explication a été admise sans objection. Ce qui reste encore un point d'interrogation, c'est l'usage auquel servait cette rosace, ce qu'elle représentait. Mon humble avis était, d'y voir une figure géométrique donnant une division mathématique du cercle, et pouvant servir à l'astronomie ou à la géographie. Cette opinion a été partagée par plusieurs d'autres.»

Einzig M. CAGNAT glaubt in der Figur «un simple jeu de marelle» zu sehen. SÉJOURNÉ zeigt jedoch ausführlich, daß diese Deutung nicht zutreffen kann, und kommt zum Schluß:

«Ceux-là sont tracés sans préméditation, un jour d'ennui; celle-ci a été voulue et réfléchie. En somme, la sagacité des antiquaires peut encore s'exercer à chercher l'usage auquel était destinée la mosaïque de Ḥoṣn.»

Damit sind die Angaben von J. TROPFKE durch eine Figur bestätigt. Nach der mazedonischen Eroberung und der Besetzung durch Griechen diente im Orient die Zahl 60 als Grund- und Ausgangszahl. Sodann wurde der Viertelkreis in 30 Teile zerlegt.

Immerhin bleiben noch zwei Fragen zu beantworten:

1. Warum beginnt die Beschriftung nicht mit der Zahl 120 in gleicher Weise wie der neue Tag mit 24 Uhr?
2. Wozu diente das Mosaik von Ḥoṣn?

HANS STOHLER, Basel.

Leser, die diese Fragen beantwortet haben, sind gebeten, ihren Befund der Redaktion mitzuteilen, damit wir die Antworten, zusammen mit einer schon vorliegenden Deutung, publizieren können.

V. *Zum Aufsatz des Herrn G. Bilger*

Herr G. BILGER (Genf) hat zwei Konstruktionen von Trapezen beschrieben[1]) und eine Verallgemeinerung derselben angedeutet. Diese Verallgemeinerung besteht darin, ein Trapez (Parallelseiten AB und CD) zu ermitteln, wenn A, C, die Winkel $\sphericalangle CAD = \varphi$ und $\sphericalangle ACB = \psi$ und ein Punkt P der Diagonale BD gegeben sind. Die hier folgende projektive Lösung läßt die Realitätsbedingung des Ergebnisses gut erkennen und legt weitere Verallgemeinerungen nahe.

Zunächst seien die allgemeinen Vierecke betrachtet, von denen A, C, φ, ψ und ein Punkt P der Diagonale $f = [BD]$ gegeben sind. Legt man f beliebig durch P, so sind die Punkte B und D auf den Winkelschenkeln b und d von ψ und φ bestimmt. Dreht sich f um P, so sind die Punktreihen (B) auf b und (D) auf d projektiv, ebenso beschreiben die Viereckseiten a und c projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln A und C. Daher durchwandert der Schnittpunkt K von $[AB]$ und $[CD]$ einen Kegelschnitt k. k geht durch A und C. Die Tangente in A ergibt sich, wenn man die Gerade c durch A legt; dann geht auch f durch A und berührt k in A. Ebenso berührt k in C die Gerade $[PC]$. Legt man ferner f durch den Schnittpunkt F der Winkelschenkel b und d, so fallen B, D und K nach F. *k geht daher durch F und berührt $[PA]$ in A und $[PC]$ in C.*

Konstruiert man noch nach dem Satz von PASCAL die Tangente in F an k, so findet man aus den Punkten A, C und F samt ihren Tangenten in bekannter Weise den Mittelpunkt und die Asymptoten von k: der Mittelpunkt liegt auf jeder Geraden, die den Mittelpunkt einer Sehne (zum Beispiel AC) mit deren Pol verbindet; diese Gerade *und* die Parallele zur Sehne sind ein Paar der Durchmesserinvolution.

Soll das Viereck $ABCD$ nun ein *Trapez* sein, so ist K einer der Fernpunkte von k. Es gibt demnach zwei reelle Lösungen, wenn k eine Hyperbel ist. Es gibt eine einzige Lösung, wenn k eine Parabel ist. Mit andern Worten: *Es gibt zwei, eine oder keine reelle Lösung, je nachdem F außerhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt, die $[PA]$ in A und $[PC]$ in C berührt.*

---

[1]) G. BILGER, *Construction de trapèzes*, El. Math. 5, H. 6, 134 (1950).

In gleicher Weise lassen sich weitere Aufgaben lösen. Sollen im Viereck $ABCD$ zum Beispiel die Seiten AB und CD einen gegebenen Winkel χ einschließen, so ergibt sich K zweideutig als Schnittpunkt von k mit dem Kreis durch A und C, der den Randwinkel χ über der Sehne AC faßt.

F. HOHENBERG, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 75. Des relations

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \qquad (1)$$

et

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

déduire les relations

$$\sin 2\,\alpha + \sin 2\,\beta + \sin 2\,\gamma = 0 \qquad (3)$$

et

$$\cos 2\,\alpha + \cos 2\,\beta + \cos 2\,\gamma = 0. \qquad (4)$$

Peut-on déduire réciproquement (2) de (1) et (3) ? Plus généralement, trouver toutes les relations entre α, β et γ permettant de satisfaire à (1) et (3). F. FIALA (Neuchâtel).

Solution de l'auteur: Considérons l'identité

$$e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = (e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma})^2 - 2\,e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}\left(e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} + e^{-i\gamma}\right)$$

et séparons en partie réelle et partie imaginaire en posant pour abréger

$$[\sin\alpha] = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma, \text{ etc.}$$

On obtient les formules

$$[\cos 2\,\alpha] = [\cos\alpha]^2 - [\sin\alpha]^2 - 2\,[\cos\alpha]\cos(\alpha+\beta+\gamma) - 2\,[\sin\alpha]\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$[\sin 2\,\alpha] = 2\,[\cos\alpha]\,[\sin\alpha] + 2\,[\sin\alpha]\cos(\alpha+\beta+\gamma) - 2\,[\cos\alpha]\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

On en déduit immédiatement (3) et (4) de (1) et (2). De (1) et (3) on déduit soit (2), puis

$$\beta - \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\,k\,\pi, \qquad \gamma - \beta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\,k'\,\pi,$$

soit

$$\alpha + \beta + \gamma = k\,\pi,$$

puis

$$\alpha = m\,\pi, \qquad \gamma = -\beta + 2\,n\,\pi$$

ou les permutations cycliques.

Die in Bd. *5*, S. 137 (1950), erschienene Lösung enthält im letzten Teil einen Fehlschluß (Vierecke mit parallelen Seiten sind nicht notwendig ähnlich!). Wie die Verfasserin mitteilt, kann man aus den Ausdrücken für die reellen Größen μ und ν und der Identität

$$e^{i(\alpha+\beta)}\sin(\alpha-\beta) + e^{i(\beta+\gamma)}\sin(\beta-\gamma) + e^{i(\gamma+\alpha)}\sin(\gamma-\alpha) = 0$$

ein lineares Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten und den Unbekannten $e^{i(\alpha+\beta)}$, $e^{i(\beta+\gamma)}$, $e^{i(\gamma+\alpha)}$ bilden. Die Diskussion dieses Systems führt auf die in (6) und (8) angegebenen Lösungen.

Aufgabe 92. Ein Flächenstück auf einem Drehkegel ist begrenzt von zwei kongruenten Parabelbogen, die sich im Punkte A im Abstand m von der Kegelspitze unter rechtem Winkel schneiden. Man berechne dieses Mantelstück, wenn der Öffnungswinkel des Kegels 60° beträgt.

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).