Elementare Bestimmung der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld

Autor(en): **Giger, Adolf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15579

Toutes ces accélérations sont centripètes, inclusivement a_c pour le cas $\omega' < \omega$.

$$m\,r\,\omega'^2 = S + [-m\,r\,(\omega - \omega')^2] + [-2\,m\,r\,\omega'\,(\omega - \omega')].$$

Après simplifications, il reste $S = m\,r\,\omega^2$. Pour l'observateur en X' les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS sont une réalité physique. Sinon S ne serait pas égal à $m\,r\,\omega^2$. Pour un observateur dans le système X'', qui tourne par rapport à X avec la même vitesse angulaire que m, m se trouve en équilibre:

$$O = \vec{S} + (-m\,\vec{a}_n). \tag{4'}$$

$-m\,\vec{a}_n$ est une force centrifuge réelle, mesurable en X''. *La force centrifuge n'existe que pour un observateur en rotation par rapport à un axe fixe, elle atteint sa valeur maxima $m\,r\,\omega^2$ pour l'observateur qui tourne à la même vitesse que m par rapport à cet axe.* Mais, comment un observateur fixe, pour lequel les forces centrifuges n'existent pas, pourrait-il expliquer la déformation des corps élastiques en rotations? Un corps élastique peut être assimilé à un nombre très grand N de points matériels Δm reliés entre eux par des petits «ressorts» immatériels. L'observateur fixe écrira l'équation du mouvement pour l'ensemble N des points Δm:

$$N(\Delta m)\,\vec{a}_n = \vec{S} \quad \text{ou} \quad N(\Delta m)\,r_0\,\omega^2 = S,$$

r_0 étant le rayon du cercle décrit par le centre de gravité des Δm. $r_0 = \sum_1^N r_i/N$. On peut toutefois écrire l'équation du mouvement pour chaque point Δm si l'on introduit les forces de liaison S_i:

$$\Delta m\,r_1\,\omega^2 = S - S_1,$$
$$\Delta m\,r_2\,\omega^2 = S_1 - S_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta m\,r_N\,\omega^2 = S_{N-1}.$$

L'addition de ces équations nous donne $\Delta m\,\omega^2 \sum_1^N r_i = S$ d'où $N(\Delta m)\,r_0\,\omega^2 = S$. Les forces de liaison $S_1, \ldots, S_{N-1}$ agissent deux à deux sur les «ressorts», d'où résulte la déformation du corps élastique. Les deux exemples présentés ici peuvent servir de prototype pour les différents problèmes de mécanique. GEORGES V. TORDION, Zurich.

Elementare Bestimmung der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld

Es wird im folgenden das kinetische Problem behandelt, welche Bahn ein Körper unter der anziehenden Wirkung eines andern Körpers beschreibt. Dabei wird das Newtonsche Gravitationsgesetz vorausgesetzt:

$$P = k\,\frac{M\,m}{r^2},$$

wobei k die Gravitationskonstante, M die Masse des als ruhend betrachteten Zentralkörpers, m die Masse des sich bewegenden Körpers und r den Abstand der beiden Massen bedeutet.

Unser Problem liefert also auch die Bewegung von Planeten und Kometen unter der anziehenden Wirkung der Sonne, wobei störende Einflüsse durch andere Körper vernachlässigt werden.

Die Lösung der gestellten Aufgabe erfordert im allgemeinen die Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung. Wenn diese in der folgenden Behandlung nicht nötig sind, so deshalb, weil die Gleichungen der Kegelschnitte speziell präpariert wurden. Es wird nämlich eine Kegelschnittgleichung abgeleitet, welche für alle Schnitte dieselbe Form besitzt und zudem mit der Bewegungsgleichung für den Körper im Gravitationsfeld übereinstimmt. Damit ist dann gezeigt, daß die Bahnkurve ein Kegelschnitt ist, und weiter ergibt der Vergleich der beiden Gleichungen zusätzliche Bestimmungen für die Exzentrizität usw.

1. *Die Aufstellung der Bewegungsgleichung*

Um die Bewegung der Masse m vollständig beschreiben zu können, verwenden wir den Energie- und Flächensatz.

Die kinetische Energie in einem beliebigen Bahnpunkt beträgt:

$$E_k = \frac{m v^2}{2}.$$

Die potentielle Energie wird der Einfachheit halber mittels eines Integrals berechnet. Sie ist als das Linienintegral der Kraft definiert, nämlich:

$$E_p = \int_\infty^r P\,dr = \int_\infty^r k\frac{M m}{r^2}\,dr = -k\frac{M m}{r}.$$

Hier wollen wir vorteilhaft eine Beschleunigung g einführen:

$$P = k\frac{M m}{r^2} = g m \quad \text{mit} \quad g = \frac{k M}{r^2}.$$

Im Abstande r_0 sei $g = g_0 = k M/r_0^2$. Dann wird

$$g = \frac{k M}{r^2} = \frac{k M r_0^2}{r_0^2 r^2} = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Das Gravitationsgesetz erhält nun die Form:

$$P = g_0 \frac{r_0^2}{r^2} m.$$

Und für die potentielle Energie ergibt sich:

$$E_p = -\frac{k M m}{r} = -g r m = -g_0 m \frac{r_0^2}{r}.$$

Nun können wir den Energiesatz für die Punkte P_0 und P formulieren:

$$\frac{m}{2} v_0^2 - g_0 r_0 m = \frac{m}{2} v^2 - g_0 m \frac{r_0^2}{r} .$$

Diese Gleichung lösen wir nach $1/r$ auf:

$$\underline{\frac{1}{r} = \frac{v^2 - v_0^2}{2 g_0 r_0^2} + \frac{1}{r_0}} . \tag{1}$$

Der Flächensatz liefert sofort die Beziehung:

$$\frac{\varrho_0 v_0}{2} = \frac{\varrho v}{2} \quad \text{oder} \quad \underline{v = \frac{\varrho_0 v_0}{\varrho}} . \tag{2}$$

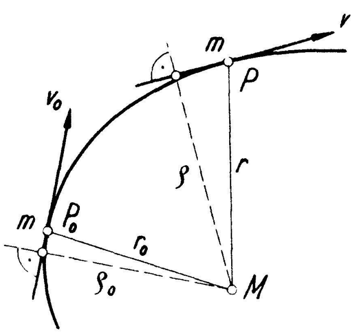

Fig. 1

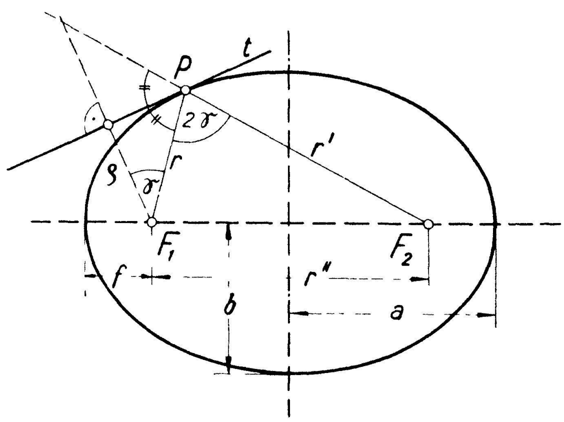

Fig. 2

Durch Einsetzen von v aus (2) in (1) ergibt sich die Bewegungsgleichung der Masse m:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varrho_0^2}{r_0^2} \cdot \frac{v_0^2}{2 g_0 \varrho^2} + \frac{2 g_0 r_0 - v_0^2}{2 g_0 r_0^2} .$$

An dieser Stelle wollen wir die vereinfachende Annahme treffen, daß $r_0 = \varrho_0$ sei, d.h. der Punkt P_0 liege an derjenigen Stelle der Bahn, wo die Geschwindigkeit des Körpers senkrecht zum Fahrstrahl von M nach m gerichtet ist (Fig. 1). Dadurch haben wir die Anfangsbedingungen für diesen speziellen Bahnpunkt formuliert. Es wird also:

$$\underline{\frac{1}{r} = \frac{v_0^2}{2 g_0 \varrho^2} + \frac{2 g_0 r_0 - v_0^2}{2 g_0 r_0^2}} . \tag{3}$$

Diese Bewegungsgleichung ist etwas ungewöhnlich, da sie den Radiusvektor r in Funktion des Tangentenabstandes ϱ darstellt.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Kegelschnitte zu genau demselben Gleichungstyp führen.

2. *Die Ableitung der neuen Kegelschnittgleichungen*

Die Ableitung des neuen Gleichungstyps für Kegelschnitte wird nun für die Ellipse explizite durchgeführt. Es wird dabei von der für Kegelschnitte bekannten Tatsache ausgegangen, daß die Tangente den Winkel, eingeschlossen durch die Leitstrahlen des betreffenden Punktes, halbiert.

Es ist (Fig. 2): $\varrho = r \cos\gamma$.

Mit Anwendung der Halbwinkelformel

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{s(s-r'')}{r\,r'}}\,,$$

wobei

$$r' = 2a - r, \quad r'' = 2(a-f), \quad s = \frac{r+r'+r''}{2} = 2a - f,$$

also

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{(2a-f)f}{(2a-r)r}}\,,$$

ergibt sich

$$\varrho^2 = r^2\cos^2\gamma = \frac{(2a-f)f}{(2a/r)-1}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{(2a-f)f}{2a\varrho^2} + \frac{1}{2a}\,.$$

Die Halbachse a können wir aber in Funktion der Fokallänge f und der numerischen Exzentrizität ε ausdrücken:

$$f = a - \sqrt{a^2-b^2} = a(1-\varepsilon)\,,$$

wo

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\,,$$

also

$$a = \frac{f}{1-\varepsilon}\,.$$

Diesen Wert für a führen wir oben ein und erhalten:

$$\underline{\underline{\frac{1}{r} = \frac{f(1+\varepsilon)}{2\varrho^2} + \frac{1-\varepsilon}{2f}}}\,. \tag{4}$$

Für die Parabel ergibt sich mit dem Satze von EUKLID sofort: $1/r = f/\varrho^2$. Das ist die Gleichung (4) für $\varepsilon = 1$. Durch eine ähnliche Überlegung wie für die Ellipse zeigt man, daß auch die Hyperbel auf die Gleichung (4) führt.

3. *Der Vergleich der Bewegungsgleichung mit der Kegelschnittgleichung*

Die Gleichungen (3) und (4) haben dieselbe Form, womit bewiesen ist, daß die Bahnkurve eines Körpers im Gravitationsfeld ein Kegelschnitt ist. Der Vergleich liefert uns weitere Einzelheiten über die Bahn, nämlich die numerische Exzentrizität ε und die Brennweite f in Funktion der Anfangsbedingungen:

$$\frac{f(1+\varepsilon)}{2} = \frac{v_0^2}{2g_0}\,, \qquad \frac{1-\varepsilon}{2f} = \frac{2g_0r_0 - v_0^2}{2g_0r_0^2}\,.$$

Durch Elimination von f ergibt sich:

$$\varepsilon^2 = \left(1 - \frac{v_0^2}{g_0 r_0}\right)^2 .$$

Die Elimination von ε liefert:

$$f_1 = r_0 \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{r_0 v_0^2}{2 g_0 r_0 - v_0^2} .$$

f_1 ist also der Abstand des einen Scheitelpunktes der Bahn (unser Anfangspunkt) vom Zentralkörper M und f_2 der Abstand des andern Scheitelpunktes von M.

Adolf Giger, Solothurn.

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Bemerkung zur Kreisteilung*

Im Jubiläumsheft[1]) zum zehnjährigen Bestehen der ausgezeichneten mathematisch-naturwissenschaftlichen Zeitschrift *Euclides* (Madrid), auf die wir bei dieser Gelegenheit gerne hinweisen möchten, beweist J. Barinaga die hübsche Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11} .$$

Er verwendet dazu den Wert einer «Gaußschen Summe», der allerdings dort auf elementarem Wege gewonnen wird. Die folgende Verifikation ergibt sich unmittelbar aus dem Moivreschen Satz.

Setzen wir $z = e^{2\pi i/11}$ und verwenden die Darstellung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

so erhält die linke Seite unserer Beziehung die Form

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1} + \frac{2}{i} \cdot \frac{z^2 - 1}{z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{2z^5 + z^4 - 2z^3 + 2z^2 - z - 2}{z(z^3 + 1)} .$$

Quadriert man den Zähler und berücksichtigt, daß $z^{10} + z^9 + \cdots + z + 1 = 0$, so ergibt sich der Wert $-11 z^2 (z^3 + 1)^2$, womit der Beweis geliefert ist.

Mit der Methode von Barinaga lassen sich weitere ähnliche Beziehungen finden, zum Beispiel:

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}; \qquad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{19} + 4 \sin \frac{2\pi}{19} - 4 \sin \frac{3\pi}{19} + 4 \sin \frac{8\pi}{19} = \sqrt{19} .$$

Die Verifikation sei dem Leser überlassen.

E. Trost.

II. *Zwei nichtkonstruierbare Aufgaben des Dreiecks*

Die Konstruktion des Dreiecks mit Lineal und Zirkel aus den Abständen des Umkreismittelpunktes von den Seiten des Dreiecks oder aus den Abständen des Mittelpunktes eines Berührungskreises (des Inkreises oder eines Ankreises) von den Eckpunkten des Dreiecks ist im allgemeinen nicht möglich.

---

[1]) Vol. *11*, 114–115 (1951).