Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1951)
Heft: 4

Artikel: Sur les forces d'inertie
Autor: Tordion, Georges V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15578

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VI Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 15. Juli 1951

Sur les forces d'inertie

Etant donné que certains manuels didactiques de mécanique ne mettent pas suffisamment en évidence les points délicats dont nous parlerons plus bas, il nous a paru utile de formuler quelques pensées sur l'application de la loi fondamentale de la dynamique dans les différents systèmes de référence. Nous resterons dans le cadre de la mécanique classique et nous étudierons seulement le mouvement d'un point matériel; la généralisation des raisonnements sur le cas du mouvement d'un corps solide ne présente aucune difficulté.

Admettons qu'un point matériel m se trouve en équilibre dans un système de référence X, Y, Z, supposé galiléen par rapport au système absolument fixe de la mécanique classique. Nous dirons que la résultante de toutes les forces de contact $\vec{N}_i$ et de volume $\vec{F}_i$ agissant sur m est nulle dans le système X, Y, Z.

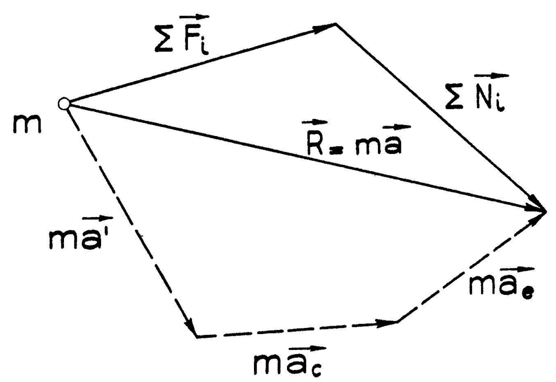

Fig. 1. Système X, Y, Z.

Si le point matériel m se trouve en mouvement non-uniforme d'accélération $\vec{a}$ par rapport à X, Y, Z, nous dirons alors que la résultante des forces n'est pas nulle, mais égale à $m\vec{a}$. L'équation du mouvement s'écrira (fig. 1):

$$\vec{R} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i \tag{1}$$

L'expression $\vec{R} = m\vec{a}$ ne signifie pas qu'un vecteur $\vec{R}$ est égal à un *autre* vecteur $m\vec{a}$, mais qu'un *seul* vecteur $\vec{R}$ est égal à $m\vec{a}$ conformément à la définition de la masse; cette dernière étant indépendante des systèmes de référence.

Admettons maintenant un système de référence X', Y', Z' qui n'est pas galiléen par rapport à X, Y, Z, ce qui revient à dire qu'on va mesurer pour m dans le système X', Y', Z' une accélération $\vec{a}'$, qui n'aura généralement ni la même grandeur ni la même direction que $\vec{a}$. Nous dirons que dans le système X', Y', Z' la résultante des forces agissant sur m est égale à $m\vec{a}'$. Les forces de contact et de volume n'ayant pas changé (le monde physique est indépendant du choix des axes de référence) nous constatons l'existence réelle d'une nouvelle force $-m(\vec{a}-\vec{a}')$ où la différence $\vec{a}-\vec{a}'$ est égale à la somme géométrique de l'accélération d'entraînement et de l'accélération

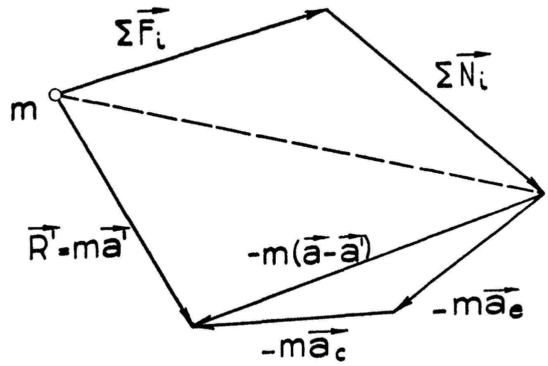

Fig. 2. Système X', Y', Z'.

de CORIOLIS. Cette nouvelle force, nommée force d'inertie, *est mesurable* dans le système de référence X', Y', Z', à l'aide d'un dynamomètre par exemple. L'équation du mouvement s'écrira (fig. 2):

$$\vec{R}' = m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i + [-m(a-a')] \tag{2}$$

ou

$$\vec{R}' = m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c). \tag{3}$$

La décomposition de la force d'inertie $-m(\vec{a}-\vec{a}')$ dans les deux forces $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ n'est possible que si l'observateur dans le système X', Y', Z' connaît le mouvement relatif de X', Y', Z' par rapport à X, Y, Z. On peut toutefois s'imaginer un observateur immatériel qui ne connaît pas ce mouvement. Cet observateur constate alors expérimentalement une force réelle $-m(\vec{a}-\vec{a}')$ d'origine inconnue, ce qui l'oblige à admettre l'existence d'un champ de gravitation qui produit cette force. Ce fait est en accord avec la théorie de la relativité généralisée d'EINSTEIN.

1er exemple. Une sphère se trouve sur une plate-forme. Faisons abstraction de tout frottement possible. La plate-forme se meut avec une accélération $\vec{a}'$ par rapport aux axes fixes X, Y, Z. Pour un observateur dans le système fixe, la sphère se trouve en équilibre. Pour un observateur dans le système X', Y', Z' relié à la plate-forme, la sphère se meut avec une accélération $-\vec{a}'$. S'il sait que X', Y', Z' se meut avec $\vec{a}'$ par rapport à X, Y, Z, il dira que c'est la force d'inertie d'entraînement

$$-m[0-(-\vec{a}')] = -m\vec{a}' = -m\vec{a}_e$$

qui agit sur la sphère ($\vec{a}_c = 0$). Pour lui, cette force est une réalité physique, mesurable avec un dynamomètre. L'observateur qui ne connaît pas $\vec{a}_e$ sera obligé de constater l'existence d'un champ de gravitation horizontal d'accélération $-\vec{a}'$. Pour lui, la force $-m\vec{a}'$ est tout aussi réelle que $-m\vec{g}$ pour les habitants de la terre.

Choisissons maintenant un système de référence X'', Y'', Z'' tel que $\vec{a}'' = 0$ (c'est toujours possible). Nous dirons que m étant en équilibre par rapport à X'', Y'', Z'', la résultante des forces agissant sur m est nulle dans ce système. Sur m agissent toujours les mêmes forces du système X, Y, Z et, en plus, une force d'inertie $-m\vec{a}$. Connaissant le mouvement de X'', Y'', Z'' par rapport à X', Y', Z', nous pouvons décomposer $-m\vec{a}$ dans une somme géométrique $(-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c) + (-m\vec{a}')$. La force $-m\vec{a}$

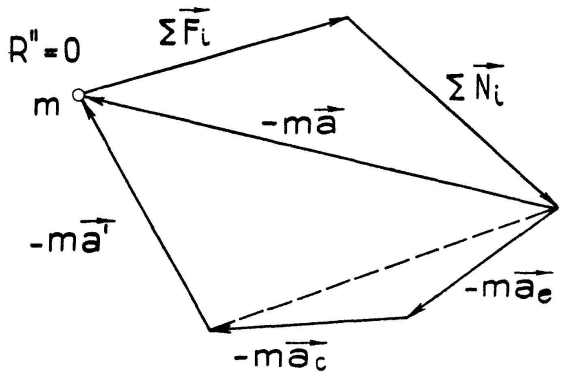

Fig. 3. Système X'', Y'', Z''.

est mesurable dans le système X'', Y'', Z'', donc une réalité physique pour un observateur dans ce système. L'équation du mouvement s'écrira (fig. 3):

$$\vec{R}'' = m\vec{a}'' = 0 = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i + (-m\vec{a}) \tag{4}$$

ou

$$0 = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c) + (-m\vec{a}'). \tag{5}$$

Si nous comparons les équation (1) et (4), nous constatons qu'elles sont identiques, mais que leur interprétation peut être différente:

1re interprétation: Nous *restons* dans le système de référence X, Y, Z et écrivons l'équation (1) sous la *forme* (4). C'est le principe de D'ALEMBERT. La force $-m\vec{a}$ est fictive, vu que m est en mouvement non-uniforme en X, Y, Z et pas en équilibre.

2e interprétation: Nous écrivons l'équation (4) dans son propre système de référence X'', Y'', Z'', dans ce cas la force $-m\vec{a}$ est une réalité physique, vu que m est en équilibre en X'', Y'', Z''.

De même, si nous comparons les équations (3) et (5):

1re interprétation: Nous *restons* dans le système X', Y', Z' et écrivons l'équation (3) sous sa *forme* (5). C'est le principe de D'ALEMBERT. La force $-m\vec{a}'$ est fictive, mais les forces $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ sont, pour l'observateur en X', Y', Z', des forces réelles.

2e interprétation: Nous écrivons l'équation (5) dans son propre système de référence X'', Y'', Z'' et les forces $-m\vec{a}'$, $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ sont toutes réelles, parce que m est en équilibre par rapport à X'', Y'', Z''.

Nous remarquons encore que l'observateur dans le système X, Y, Z peut écrire l'équation (1) sous une nouvelle forme (fig. 1 en traits pointillés):

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{N}_i. \tag{3'}$$

Si nous comparons les équations (3) et (3'), nous constatons aussi qu'elles sont identiques, mais que leur interprétation peut être différente:

1re interprétation: Nous *restons* dans le système X, Y, Z et écrivons l'équation (3') sous sa *forme* (3). C'est le principe de D'ALEMBERT. Les forces $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ sont fictives, vu que m a un mouvement d'accélération $\vec{a}$ dans X, Y, Z et non d'accélération $\vec{a}'$.

2e interprétation: Nous écrivons (3) dans son propre système de référence X', Y', Z' et les forces $-m\vec{a}_e$ et $-m\vec{a}_c$ sont réelles, vu que m a un mouvement d'accélération $\vec{a}'$ en X', Y', Z'.

Les forces de contact et de volume ne dépendent pas en mécanique classique du système de référence choisi, mais leur résultante sera différente dans chaque système. Il est toujours possible de choisir un système tel que la résultante des forces soit nulle, l'équation du mouvement devient alors, dans ce système, une équation d'équilibre. Les forces d'inertie sont des forces physiquement existantes pour les observateurs se trouvant dans les systèmes accélérés par rapport à X, Y, Z. La première interprétation provoque souvent chez les étudiants en mécanique des malentendus déplorables, parce qu'elle est purement formelle et cache le sens physique des choses. Dans l'enseignement il serait souhaitable de n'insister que sur la deuxième interprétation, naturelle pour un étudiant qui se place mentalement dans le système de coordonnées dans lequel il étudie le problème. Cette deuxième interprétation est, par ailleurs, celle de M. POHL dans son livre *Einführung in die Mechanik und Akustik.*

2e exemple. Un point matériel m est attaché à l'une des extrémités d'un fil inextensible de longueur r, dont l'autre extrémité est un point fixe O. On imprime au fil et au point matériel m dans le plan horizontal un mouvement de rotation autour de O avec une vitesse angulaire constante ω par rapport à un axe de référence fixe X passant par O. Nous isolons m du fil et nous introduisons la force centripète $\vec{S}$. Cette force *ne change pas* avec le choix du système de référence. C'est l'unique force de contact agissant sur m, les forces de volume étant nulles dans le plan horizontal.

L'observateur lié à X écrira l'équation du mouvement:

$$m\vec{a}_n = \vec{S}. \tag{1'}$$

Sachant que $a_t = 0$ et que $a_n = r\,\omega^2$, on en déduit que $S = m\,r\,\omega^2$. L'observateur lié à l'axe de référence X' qui tourne par rapport à l'axe X avec une vitesse angulaire constante $\omega - \omega'$ $(\omega' < \omega)$, où ω' est la vitesse angulaire de m relative à l'axe X', écrira comme suit l'équation du mouvement de m, dans le cas où il ne connaîtrait pas le mouvement relatif:

$$m\vec{a}'_n = \vec{S} + [-m(\vec{a}_n - \vec{a}'_n)], \tag{2'}$$

$$m\,r\,\omega'^2 = S + [-m(r\,\omega^2 - r\,\omega'^2)]. \tag{2''}$$

L'expression entre crochets représente une force d'inertie centrifuge mesurable en X'. Pour un observateur dans le système X', qui connaît le mouvement relatif, la force centrifuge $-m(\vec{a}_n - \vec{a}'_n)$ se décompose dans la somme $(-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c)$.

Nous remarquons que:

$$a_n = r\,\omega^2, \quad a'_n = r\,\omega'^2, \quad a_{ne} = r(\omega - \omega')^2, \quad a_{te} = 0 \quad \text{et} \quad a_c = 2(\omega - \omega')\,r\,\omega'.$$

Toutes ces accélérations sont centripètes, inclusivement a_c pour le cas $\omega' < \omega$.

$$m\, r\, \omega'^2 = S + [-m\, r\, (\omega - \omega')^2] + [-2\, m\, r\, \omega' (\omega - \omega')].$$

Après simplifications, il reste $S = m\, r\, \omega^2$. Pour l'observateur en X' les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS sont une réalité physique. Sinon S ne serait pas égal à $m\, r\, \omega^2$. Pour un observateur dans le système X'', qui tourne par rapport à X avec la même vitesse angulaire que m, m se trouve en équilibre:

$$0 = \vec{S} + (-m\, \vec{a}_n). \tag{4'}$$

$-m\, \vec{a}_n$ est une force centrifuge réelle, mesurable en X''. *La force centrifuge n'existe que pour un observateur en rotation par rapport à un axe fixe, elle atteint sa valeur maxima $m\, r\, \omega^2$ pour l'observateur qui tourne à la même vitesse que m par rapport à cet axe.* Mais, comment un observateur fixe, pour lequel les forces centrifuges n'existent pas, pourrait-il expliquer la déformation des corps élastiques en rotations? Un corps élastique peut être assimilé à un nombre très grand N de points matériels Δm reliés entre eux par des petits «ressorts» immatériels. L'observateur fixe écrira l'équation du mouvement pour l'ensemble N des points Δm:

$$N(\Delta m)\, \vec{a}_n = \vec{S} \quad \text{ou} \quad N(\Delta m)\, r_0\, \omega^2 = S,$$

r_0 étant le rayon du cercle décrit par le centre de gravité des Δm. $r_0 = \sum_1^N r_i/N$. On peut toutefois écrire l'équation du mouvement pour chaque point Δm si l'on introduit les forces de liaison S_i:

$$\begin{aligned} \Delta m\, r_1\, \omega^2 &= S - S_1, \\ \Delta m\, r_2\, \omega^2 &= S_1 - S_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta m\, r_N\, \omega^2 &= S_{N-1}. \end{aligned}$$

L'addition de ces équations nous donne $\Delta m\, \omega^2 \sum_1^N r_i = S$ d'où $N(\Delta m)\, r_0\, \omega^2 = S$. Les forces de liaison $S_1, \ldots, S_{N-1}$ agissent deux à deux sur les «ressorts», d'où résulte la déformation du corps élastique. Les deux exemples présentés ici peuvent servir de prototype pour les différents problèmes de mécanique. GEORGES V. TORDION, Zurich.

Elementare Bestimmung der Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld

Es wird im folgenden das kinetische Problem behandelt, welche Bahn ein Körper unter der anziehenden Wirkung eines andern Körpers beschreibt. Dabei wird das Newtonsche Gravitationsgesetz vorausgesetzt:

$$P = k\, \frac{M\, m}{r^2},$$

wobei k die Gravitationskonstante, M die Masse des als ruhend betrachteten Zentral-