

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1951)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Diese beiden Beispiele lassen unschwer erkennen, daß selbst Unstetigkeiten im Lösungsverlauf, wie es besonders bei Reglerproblemen vorkommt, kein Hindernis für die zeichnerische Integration bedeuten.

Auch auf mehrere gekoppelte Differentialgleichungen bleibt dieses Verfahren anwendbar, wenn die unbekannten Funktionen in der Form gegeben sind

$$y_1'' = f_1(x, y_1, y_1'; y_2, y_2'; \dots),$$

$$y_2'' = f_2(x, y_2, y_2'; y_1, y_1'; \dots),$$

.....

Man hat jetzt nur dementsprechend zwei oder mehrere Konstruktionsgleichungen zugleich zu erfüllen:

$$\Delta k_1 = h_1 \Delta x y_1'',$$

$$\Delta k_2 = h_2 \Delta x y_2'',$$

.....

Wenn auch die zeichnerische Integration gekoppelter Differentialgleichungen natürlich langwieriger ist als die einer einzelnen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so geht trotzdem die Übersicht niemals verloren: denn der einzuschlagende Weg wird stets von dem gleichen einfachen Lösungsgedanken geleitet.

ERICH SPONDER, Paris.

## Kleine Mitteilungen

### I. Rationale Dreiecke mit rationalen Koordinaten<sup>1)</sup>

Man erhält alle rationalen Dreiecke, wenn man  $a = u(v + 1/v)$ ,  $b = u(w + 1/w)$  und  $h_c = 2u$  setzt und  $u, v$  und  $w$  rational wählt. Es ist dann  $c = u(v - 1/v + w - 1/w)$ . Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem hat man  $A[u(1/v - v), 0]$ ,  $B[u(w - 1/w), 0]$  und  $C[0, 2u]$ . Mit Hilfe der rationalen orthogonalen Koordinatentransformation (Ähnlichkeit):

$$x^* = k \left( p + \frac{x(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{y \cdot 2t}{1+t^2} \right), \quad y^* = k \left( q + \frac{x \cdot 2t}{1+t^2} + \frac{y(1-t^2)}{1+t^2} \right)$$

( $k, p, q, t$  rational,  $t = \operatorname{tg} \varphi/2$ ) erhält man alle rationalen Dreiecke mit rationalen Koordinaten. Um ganzzahlige Koordinaten zu erhalten, hat man lediglich  $k$  entsprechend zu wählen. Durch entsprechende Wahl von  $p, q$  und  $t$  kann man überdies jeden rationalen invarianten Punkt (Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises, Mittelpunkt eines Berührkreises, Brocardschen Punkt usw.) in den Koordinatenursprung und einen zweiten dieser Punkte auf eine der Achsen legen.

R. LAUFFER, Graz.

<sup>1)</sup> Siehe auch die bezügliche Mitteilung von L. HOLZER, *Über Dreiecke mit ganzzahligen Koordinaten und ganzzahligen Seiten*, El. Math. 3, Nr. 6, 114 (1948).

## II. Ein Satz über die Dreieckshöhen

Bekannt ist der Satz: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen einander so, daß der von der Ecke gemessene Abschnitt zwei Drittel der ganzen Länge beträgt. Für die Höhen gilt ein ähnlicher, weniger bekannter Satz:

Die Höhen eines Dreiecks teilen einander so, daß das arithmetische Mittel der drei Verhältnisse, gebildet aus den von den Ecken ausgehenden Höhenabschnitten und den entsprechenden ganzen Längen, zwei Drittel beträgt.

*Beweis:* Für das spitzwinklige Dreieck kann der Beweis stereometrisch geliefert werden, wenn man das Dreieck als normal-axonometrisches Spurendreieck betrachtet

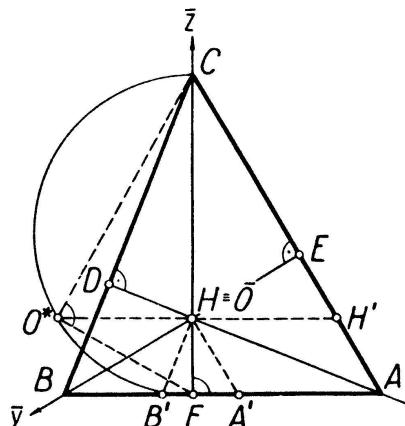


Fig. 1

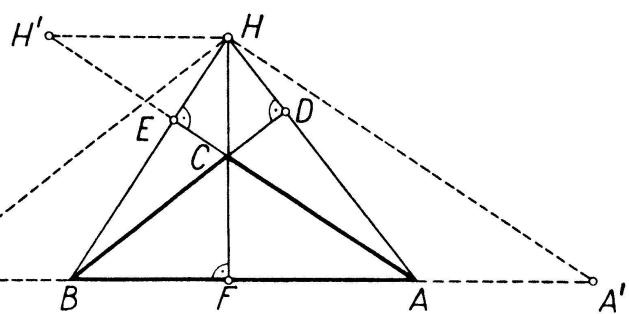


Fig. 2

(Fig. 1). Das Verkürzungsverhältnis auf der  $z$ -Achse beträgt dann  $v_z = \bar{CO}/CO^* = CO^*/CF$  und das Quadrat  $v_z^2 = \bar{CO}/CF$ . Analog findet man  $v_y^2 = \bar{BO}/BE$  und  $v_x^2 = \bar{AO}/AD$ . Da aber  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 2$  ist, ist der Satz bewiesen; denn  $\bar{O}$  ist mit dem Höhenschnittpunkt identisch.

Der *planimetrische* Beweis (Fig. 1 und 2) gilt für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gleichzeitig, wenn man berücksichtigt, daß das Teilverhältnis einer Höhe, die zur Ecke eines stumpfen Winkels gehört, negativ wird. Man zeichne  $HA' \parallel CA$ ,  $HB' \parallel CB$  und  $HH' \parallel AB$ . Dann gilt

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AB'}{AB}, \quad \frac{BH}{BE} = \frac{BA'}{BA}$$

und

$$\frac{CH}{CF} = \frac{CH'}{CA} = 1 - \frac{HA}{CA} = 1 - \frac{HA'}{CA} = 1 - \frac{A'B'}{AB}.$$

Die Summe der drei Teilverhältnisse wird

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = \frac{AB' + A'B - A'B'}{AB} + 1 = 2,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Beim rechtwinkligen Dreieck kann man die Behauptung direkt ablesen.

R. NÜSCHELER, Bern.

## III. Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung

In einer kürzlich erschienenen Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Geometrie<sup>1)</sup> wird folgender Satz von CHOQUET und KREWERAS bewiesen:

<sup>1)</sup> A. DELACHET, *La Géométrie contemporaine* (Presses Universitaires de France, Paris 1950), S. 50.

Hat eine Punktmenge  $M$  der Ebene die Eigenschaft, daß die mit einer festen Längeneinheit gemessene Distanz von zwei Punkten eine natürliche Zahl ist, und ist die Anzahl der Punkte unendlich, so liegen sämtliche Punkte auf derselben Geraden.

Der Satz gilt für jeden Raum endlicher Dimension. Der Beweis stützt sich auf den allgemeinen Satz von BEZOUT, der im Fall der Ebene besagt, daß die Anzahl der mit der richtigen Vielfachheit gezählten Schnittpunkte von zwei algebraischen Kurven  $m$ -ten bzw.  $n$ -ten Grades  $m n$  beträgt. Obwohl nur die Endlichkeit der Schnittpunktsanzahl verwendet wird, sei darauf hingewiesen, daß man in der Ebene nur Schnittpunkte von Geraden zu betrachten hat.

Sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte von  $M$  mit der Distanz  $d$ , so können die sich nicht auf der Geraden  $AB$  befindenden Punkte nur auf den  $d$  konfokalen Hyperbeln mit den Brennpunkten  $A$  und  $B$  und den Hauptachsen  $2a = 0, 1, 2, \dots, d-1$  liegen, wobei die Mittelsenkrechte von  $AB$  mitgerechnet ist. Da nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS jede beschränkte unendliche Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt besitzt und sich die Punkte von  $M$  im Endlichen nicht häufen können, liegen nur endlich viele innerhalb eines Kreises mit endlichem Radius  $R$  um den Mittelpunkt von  $AB$ . Die übrigen liegen entweder auf der Geraden  $AB$  oder in endlich vielen, durch Parallelen zu den Asymptoten gebildeten Streifen, deren Breite mit wachsendem  $R$  gegen Null strebt. Gibt es überhaupt einen außerhalb der Geraden  $AB$  liegenden Punkt  $C$ , so kann man auf analoge Weise mit den Brennpunkten  $B$  und  $C$  eine zweite Streifenschar konstruieren, die mit der ersten eine endliche Anzahl von parallelogramm-förmigen Flächenstücken bestimmt. In diesen können nur endlich viele Punkte von  $M$  Platz finden. Somit liegen unendlich viele Punkte auf der Geraden  $AB$ . Da diese Gerade aber von den Streifen der zweiten Schar in endlich vielen Strecken geschnitten wird, führt die Annahme eines nicht auf der Geraden  $AB$  liegenden Punktes zu einem Widerspruch, womit der Satz bewiesen ist.

Für jede Dimensionszahl  $p$  erhebt sich nun die Frage nach der maximalen Anzahl  $N_p$  der Punkte mit ganzzahiger Entfernung, die nicht alle auf derselben Geraden liegen. Für die Ebene ist  $N_p \geq 4$ , denn es gibt zum Beispiel folgende Vierecke  $ORST$  mit ganzen Seiten und Diagonalen<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} OR &= (\lambda \mu - 1)^2, & OS &= (\lambda + \mu)(\lambda \mu - 1), & OT &= (\lambda + \mu)^2 \\ ST &= (\lambda + \mu)(\lambda \mu + \mu - \lambda + 1), & TR &= (\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1) + 4 \lambda \mu \\ RS &= (\lambda \mu - 1)(\lambda \mu + \mu - \lambda + 1). & & & & (\lambda, \mu \text{ natürliche Zahlen.}) \end{aligned}$$

E. TROST.

## Aufgaben

**Aufgabe 86.** Der Inkreisradius und die Ankreisradien eines rechtwinkligen Dreiecks sind dann und nur dann ganze Zahlen, wenn auch die Seiten ganzzahlig sind (pythagoreische Dreiecke).  
S. Joss (Bern.)

*Lösung:* Unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen im Dreieck ergibt sich bei Berücksichtigung von  $a^2 + b^2 = c^2$

$$r = \frac{F}{s} = \frac{a b}{a + b + c} = \frac{a b (a + b - c)}{2 a b} = s - c.$$

Analog findet man  $r_a = s - b$ ,  $r_b = s - a$ ,  $r_c = s$ . Nun sind bei pythagoreischen Zahlentripeln entweder keine oder zwei der Zahlen ungerade, somit ist  $s$  ganz, und auch die Radien sind ganzzahlig. Wegen  $a = r_a + r$ ,  $b = r_b + r$ ,  $c = r_a + r_b$  ergeben umgekehrt ganzzahlige Radien ganzzahlige Seiten.  
H. DEBRUNNER (Lyß).

<sup>1)</sup> Nieuw. Tijdschr. Wiskunde 35, 117 (1947).