

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	6 (1951)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Ein zeichnerisches Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung
<b>Autor:</b>	Sponder, Erich
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-15577">https://doi.org/10.5169/seals-15577</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

5. The problem which we have discussed in the preceding may be considered as a problem of constructing a set of roads such that when one always follows new paths at each intersection all paths will be covered a single time and one returns to the starting point. Such a pattern would be suitable for the lay-out of an exposition.

There are several similar questions which one may discuss. If one supposes that the roads are lined with shops and one will cover all roads once in both directions, this is always possible, as one easily realizes. But one may restrict the paths by requiring that one shall not be permitted to return along the same road immediately from any of the intersections; then certain restrictions must be imposed on the graph. One may also ask when it is possible to cover the graph in this manner by *any* route if one only follows the rule that a new path shall be selected whenever one reaches an intersection. I leave some of these problems to the study of the reader.

OYSTEIN ORE, New Haven (Conn., U.S.A.)

## Ein zeichnerisches Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der explizit darstellbaren Form gegeben

$$y'' = f(x, y, y'),$$

so läßt sich zu ihrer genäherten zeichnerischen Integration ein Verfahren verwenden, das nicht nur zu einer ersten raschen Orientierung über den Lösungsverlauf geeignet ist (wenn von Singularitäten abgesehen wird), sondern das auch so genau ausgeführt werden kann, daß es ohne weiteres den üblichen praktischen Erfordernissen genügen dürfte. Das Verfahren stützt sich lediglich auf elementare Eigenschaften der gewöhnlichen quadratischen Parabel, aus der man sich die gesuchte Integralkurve stückweise zusammengesetzt denkt. Ein einzelnes solches Stück ist in der Fig. 1 dargestellt.

Für eine quadratische Parabel gilt bekanntlich, daß die Abszisse  $x$  des Schnittpunktes  $T$  zweier benachbarter Tangenten I und II gerade in der Mitte zwischen den Abszissen ihrer beiden Berührungsstelle 1 und 2 liegt. Haben diese den Abstand  $\Delta x$  voneinander, so läßt sich wegen des geradlinigen Verlaufes der ersten Ableitung  $y'$  die zweite Ableitung  $y''$  im Parabelpunkt  $P$  mit der Abszisse  $x$  wie folgt ausdrücken:

$$y'' = \frac{y'_2 - y'_1}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y_2}{\Delta x} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \right),$$

oder mit der zeichnerisch bequemer Benutzung ähnlich vergrößerter Dreiecke:

$$y'' = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{k_2}{h} - \frac{k_1}{h} \right) = \frac{\Delta k}{h \Delta x}.$$

Hat man also beispielsweise die konstante zweite Ableitung  $y''$  einer quadratischen Parabel gegeben, so lassen sich nach der Wahl einer Anfangstangente I in einem Anfangspunkt 1 weitere Tangenten II, ... auf folgende Weise zeichnerisch finden:

Man wählt zunächst eine geeignete Schrittänge  $\Delta x$  und dann einen solchen Konstruktionsabstand  $h$ , daß die Strecke

$$\Delta k = h \Delta x y''$$

in passender Größe aufgetragen werden kann. Die nun durch den Punkt  $T$  zu ziehende Tangente II berührt die Parabel im Punkte 2, der wiederum genau in der Mitte des dazugehörigen Schrittes  $\Delta x$  liegt. Wenn man will, kann man auch noch den Parabelpunkt  $P$  und seine Tangente auf eine in der Fig. 2 angedeutete Weise bestimmen.

Setzt man dieses Verfahren nunmehr von der Tangente II ausgehend fort, so erhält man demnach einen Tangentenzug, der die quadratische Parabel als Integralkurve genau einhüllt, und zwar unabhängig von der Wahl der Schrittänge  $\Delta x$ .

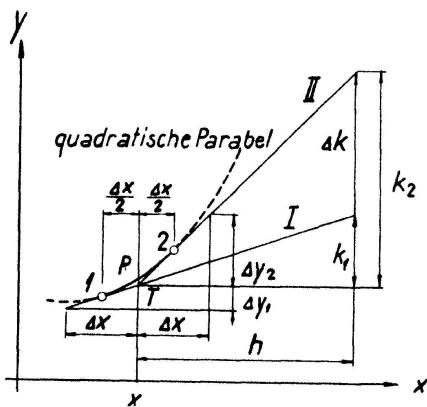


Fig. 1

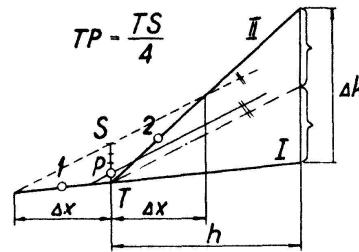


Fig. 2

Diese einfachen geometrischen Beziehungen sind nun nicht mehr streng richtig, wenn es sich um beliebige Kurven handelt, deren zweite Ableitung  $y''$  nicht konstant ist. Denkt man sie sich aber in genügend kleinen Abschnitten durch quadratische Parabeln ersetzt, so darf man dennoch für jede von ihnen die beschriebene Konstruktion anwenden, um wenigstens zu einer genäherten Lösung der Differentialgleichung  $y'' = f(x, y, y')$  zu gelangen. Statt der konstanten Strecke  $\Delta k$  ist jetzt lediglich das von Punkt zu Punkt veränderliche  $\Delta k$  nach der Konstruktionsgleichung

$$\Delta k = h \Delta x y'' = h \Delta x f(x, y, y')$$

aufzutragen, das sich eindeutig aus den jeweiligen Werten für  $x$ ,  $y$  und  $y'$  an der betrachteten Stelle  $x$  ergibt.

Dabei ist aber noch eine kleine Schwierigkeit zu überwinden.

Ist in der Fig. 1 die Tangente I die letzte bekannte Tangente an eine in ihrem weiteren Verlauf erst gesuchte beliebige Integralkurve, so hat man wohl mit dem Punkte  $T$  die Abszisse  $x$  zur Berechnung von  $\Delta k$  zur Verfügung, nicht aber die Ordinate  $y$  des noch unbekannten Kurvenpunktes  $P$  und ebensowenig die dortige erste Ableitung  $y'$ . Nun, mit Hilfe einer einfachen Iteration (wiederholtes Einsetzen), die bei genügend kleiner Schrittänge  $\Delta x$  beliebig gut konvergiert, kann man sich auch diese beiden Werte noch verschaffen. Beginnt man nämlich mit einem vernünftig geschätzten  $\Delta k$ , so findet man nach der Fig. 2 schon recht genaue Werte, besonders für die fragliche Ordinate des Kurvenpunktes  $P$  und die dortige erste Ableitung.

Dies führt nun auf ein verbessertes  $\Delta k$  und wird so lange fortgesetzt, bis die Konstruktionsgleichung  $\Delta k = h \Delta x f(x, y, y')$  an der Stelle  $x$  mit Zeichengenauigkeit erfüllt ist. Meist sind dazu nur ein bis zwei Schritte erforderlich; sollte die Konvergenz schlechter sein, so ist das dann ein Zeichen dafür, daß man wohl besser die Schrittänge  $\Delta x$  verkleinert.

Die nach diesen Gesichtspunkten getroffene Schrittwahl verbürgt wohl durch die Güte der zeichnerischen oder rechnerischen Iteration eine rasche Erfüllung der bei jedem Schritt in der Form  $\Delta k = \varphi(\Delta k)$  auftretenden Konstruktionsgleichung, vermag aber darüber hinaus naturgemäß keinerlei Anhaltspunkte dafür zu geben, mit welcher Näherung der gesamte Lösungsverlauf der Differentialgleichung wiedergegeben wird. Die damit berührte Frage der Genauigkeit kann ganz allgemein leider ebensowenig beantwortet werden wie auch sonst bei zeichnerischen Verfahren dieser Art. Unter bestimmten Annahmen läßt sich jedoch zeigen, daß der Fehler des Ergebnisses mit dem Quadrat der Schrittänge wächst. Diese einfache Beziehung gestattet es dann, aus zwei mit verschiedenen Schrittängen konstruierten Integralkurven mit guter Näherung auf die genaue Lösung zu schließen. Findet man nämlich mit einer ersten Schrittänge  $\Delta x_1$  an einer beliebigen Stelle der Integralkurve die Ordinate  $y_1$  und dann mit einer zweiten – kleineren – Schrittänge  $\Delta x_2$  die Ordinate  $y_2$ , so ergibt sich für die dortige Ordinate der unbekannten genauen Lösung

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{(\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 - 1}. \quad (\Delta x_2 < \Delta x_1)$$

Diese Korrekturformel ist streng richtig für Parabeln bis zum 4. Grad (einschließlich).

An zwei Beispielen soll nunmehr das Verfahren der zeichnerischen Integration durchgeführt werden.

$$1. \quad y'' + x^2 y = 0$$

Wird eine Windfahne gleichförmig beschleunigt geradeaus bewegt, so erhält man bei Vernachlässigung der Dämpfung die obige Differentialgleichung zur Beschreibung ihrer Schwingungen. Das  $y$  bedeutet darin etwa den Ausschlagwinkel der Windfahne gegenüber der statischen Gleichgewichtslage, die ja in die relative Windrichtung fällt. Der zu untersuchende Bewegungsverlauf möge zur Zeit  $x_0 = 1$  mit den Anfangswerten  $y_0 = 0$  und  $y'_0 = 1$  beginnen.

Welche Schrittänge  $\Delta x$  ist nun zu wählen? Als Lösung wird sich zweifellos eine immer schneller werdende Schwingung ergeben, deren Schwingungsdauer  $T$  also ständig abnehmen wird. Zur Abschätzung eines mittleren  $T$  für verschiedene Zeitpunkte  $x$  kann man immerhin versuchen, die quadratisch mit  $x$  zunehmende Federzahl des aerodynamischen Rückstellmomentes für einen Augenblick als unveränderlich anzusehen. Man findet demnach für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\text{Kreisfrequenz}} = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\pi}{x}$$

und als Schrittänge, wenn man bei nicht zu hohen Ansprüchen an die Genauigkeit

eine ganze Periode in etwa 16 bis 20 Schritte unterteilt,

$$\Delta x = \frac{T}{16 \text{ bis } 20} = \frac{1}{16 \text{ bis } 20} \cdot \frac{2\pi}{x}.$$

Für den Anfang sei  $\Delta x = 0,2$  gewählt; mit  $h = 0,5$  ergibt sich dann als Konstruktionsgleichung

$$\Delta k = -0,5 \cdot 0,2 x^2 y = -0,1 x^2 y.$$

Obwohl das jeweilige  $\Delta k$  ohne weiteres mit dem Rechenschieber ermittelt werden kann, ist in der Fig. 3 eine rein zeichnerische Ausführungsmöglichkeit angegeben.

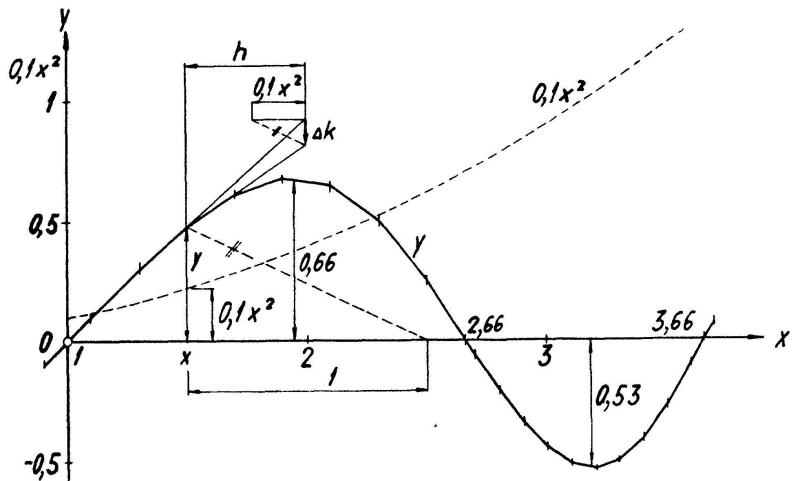


Fig. 3

Die Hilfskurve  $0,1 x^2$  braucht dazu nur für wenige Punkte berechnet zu werden, und alles übrige wird dann ohne ermüdendes Zahlenablesen mit Dreieck und Zirkel allein erledigt. Bezuglich einer einwandfreien Bestimmung der zu verwendenden Ordinate  $y$  sei auf die Fig. 2 verwiesen. — Nach dem Nulldurchgang der Windfahne bei  $x = 2,66$  wurde die Schrittänge  $\Delta x$  auf 0,1 verkürzt und gleichzeitig der Konstruktionsabstand  $h$  auf 1 verlängert, um die zeichnerische Lösung mit derselben Hilfskurve  $0,1 x^2$  fortsetzen zu können. — Die in die Fig. 3 als Ergebnis eingetragenen Ausschlagsmaxima und Nulldurchgänge stimmen in allen hingeschriebenen Stellen mit der genauen Lösung überein, die sich aus zwei Besselschen Funktionen der Ordnungen  $1/4$  und  $-1/4$  zusammensetzt.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, daß dieses auf so einfache Weise gefundene Schwingungsbild der beschleunigt bewegten Windfahne gleich drei wertvolle Aufschlüsse vermittelt:

1. daß die Schwingungsdauer kürzer wird (ein wohl selbstverständliches Ergebnis);
2. daß die Amplituden abnehmen (woraus jedoch nicht auf eine Dämpfung der Schwingung geschlossen werden darf!);
3. daß die Schnitte mit der  $x$ -Achse immer steiler werden, die Energie der Windfahne also dauernd wächst (was zunächst mit Hinblick auf den zweiten Punkt sehr überrascht).

$$2. \quad y'' + 0,01 y'^2 = g(x)$$

Fliegt ein Körper unter dem Einfluß eines irgendwie mit der Zeit  $x$  veränderlichen Antriebs  $g(x)$  waagrecht durch die Luft und berücksichtigt man seinen Widerstand, so findet man die obige Differentialgleichung für den von ihm zurückgelegten Flugweg  $y$ . In der Fig. 4 ist  $g(x)$  der Einfachheit halber geradlinig angenommen. Beginnt der Flug mit den Anfangswerten  $x_0 = 0: y_0 = 0, y'_0 = 0$ , so ist bei der hier vorausgesetzten zeitlichen Veränderlichkeit des Antriebs zu vermuten, daß die größte Fluggeschwindigkeit  $y'_{max}$  noch vor seinem Aufhören bei  $x = 8$  erreicht wird. Diese Überlegung führt zur Wahl der Schrittänge  $\Delta x = 1$ , da ja der Flugweg  $y$  und die

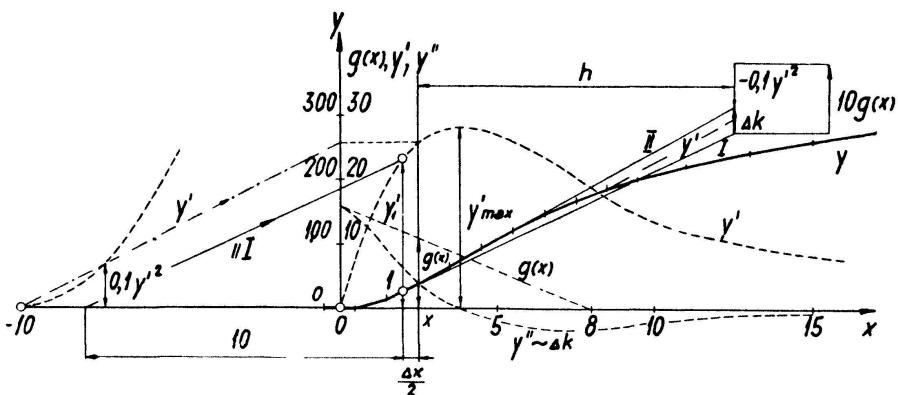


Fig. 4

Fluggeschwindigkeit  $y'$  bis zur Erreichung von  $y'_{max}$  der Viertelperiode einer Schwingung vergleichbar sind. Mit einem Konstruktionsabstand  $h = 10$  wird dann

$$\Delta k = 10 \cdot 1 \cdot g(x) - 10 \cdot 1 \cdot 0,01 y'^2 = 10 g(x) - 0,1 y'^2.$$

Die in der Fig. 4 an der Stelle  $x$  ausgeführte schrittweise Entwicklung der Lösung  $y$  und ihrer ersten Ableitung  $y'$  ist leicht zu übersehen. Der Maßstab für den Antrieb  $g(x)$  ist so gewählt, daß die ungeänderte Übertragung der jeweiligen Ordinate in den Konstruktionsplan für  $\Delta k$  dort gleich seinen zehnfachen Wert bedeutet. Eine erstmalige Abschätzung des mittleren Anstiegs  $y'$  gelingt recht genau nach einer Extrapolation der ständig mitgezeichneten Kurve  $y'$  über die halbe Schrittänge  $\Delta x/2$ . Für den Beginn der Bewegung bei  $x = 0$  ist übrigens die zweite Ableitung  $y''_0 = g(0)$  bekannt, so daß sich sofort die Anfangstangente von  $y'$  eintragen läßt. Die Strecke  $0,1 y'^2$  kann entweder mit dem Rechenschieber ermittelt werden oder noch einfacher in der Art der links angefügten Hilfskurve (Parabel). — Nach dem Aufhören des Antriebs ändert sich offensichtlich der Lösungsverlauf nur noch langsam, so daß von  $x = 10$  an die Schrittänge  $\Delta x = 2$  genommen wurde. Die Bewegung läuft jetzt unter dem alleinigen Einfluß des Luftwiderstandes allmählich aus.

In diesem Beispiel mag vielleicht die Beschleunigung des Körpers infolge des Antriebs von Bedeutung sein; sie ist leicht gefunden, weil man nur das  $\Delta k$  für jedes  $x$  mitzuzeichnen braucht und dann schon die ihm proportionale zweite Ableitung  $y'' = \Delta k/(h \Delta x)$  an einem geeigneten Maßstab ablesen kann. Auf diese Weise liefert die Konstruktion der Integralkurve mit  $y, y'$  und  $y''$  gleich alle erforderlichen Auskünfte über den Bewegungsverlauf, so wie es in der Fig. 4 geschehen ist.

Diese beiden Beispiele lassen unschwer erkennen, daß selbst Unstetigkeiten im Lösungsverlauf, wie es besonders bei Reglerproblemen vorkommt, kein Hindernis für die zeichnerische Integration bedeuten.

Auch auf mehrere gekoppelte Differentialgleichungen bleibt dieses Verfahren anwendbar, wenn die unbekannten Funktionen in der Form gegeben sind

$$y_1'' = f_1(x, y_1, y_1'; y_2, y_2'; \dots),$$

$$y_2'' = f_2(x, y_2, y_2'; y_1, y_1'; \dots),$$

.....

Man hat jetzt nur dementsprechend zwei oder mehrere Konstruktionsgleichungen zugleich zu erfüllen:

$$\Delta k_1 = h_1 \Delta x y_1'',$$

$$\Delta k_2 = h_2 \Delta x y_2'',$$

.....

Wenn auch die zeichnerische Integration gekoppelter Differentialgleichungen natürlich langwieriger ist als die einer einzelnen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so geht trotzdem die Übersicht niemals verloren: denn der einzuschlagende Weg wird stets von dem gleichen einfachen Lösungsgedanken geleitet.

ERICH SPONDER, Paris.

## Kleine Mitteilungen

### I. Rationale Dreiecke mit rationalen Koordinaten<sup>1)</sup>

Man erhält alle rationalen Dreiecke, wenn man  $a = u(v + 1/v)$ ,  $b = u(w + 1/w)$  und  $h_c = 2u$  setzt und  $u, v$  und  $w$  rational wählt. Es ist dann  $c = u(v - 1/v + w - 1/w)$ . Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem hat man  $A[u(1/v - v), 0]$ ,  $B[u(w - 1/w), 0]$  und  $C[0, 2u]$ . Mit Hilfe der rationalen orthogonalen Koordinatentransformation (Ähnlichkeit):

$$x^* = k \left( p + \frac{x(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{y \cdot 2t}{1+t^2} \right), \quad y^* = k \left( q + \frac{x \cdot 2t}{1+t^2} + \frac{y(1-t^2)}{1+t^2} \right)$$

( $k, p, q, t$  rational,  $t = \operatorname{tg} \varphi/2$ ) erhält man alle rationalen Dreiecke mit rationalen Koordinaten. Um ganzzahlige Koordinaten zu erhalten, hat man lediglich  $k$  entsprechend zu wählen. Durch entsprechende Wahl von  $p, q$  und  $t$  kann man überdies jeden rationalen invarianten Punkt (Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises, Mittelpunkt eines Berührkreises, Brocardschen Punkt usw.) in den Koordinatenursprung und einen zweiten dieser Punkte auf eine der Achsen legen.

R. LAUFFER, Graz.

<sup>1)</sup> Siehe auch die bezügliche Mitteilung von L. HOLZER, *Über Dreiecke mit ganzzahligen Koordinaten und ganzzahligen Seiten*, El. Math. 3, Nr. 6, 114 (1948).