Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1951)
Heft: 2

Artikel: Die graphische Lösung des Doppelsternproblems
Autor: Schüepp, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15575

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

mais en réalité c'est le coup de grâce: à partir de 1904, ce ne sera plus le nom de PICARD qu'on réitèrera de part et d'autre, bien qu'on trouve encore quelques travaux à l'ancienne mode.

Une transition aussi brusque n'aurait pu avoir lieu si la mode de PICARD n'avait pas été artificiellement entretenue au delà de son terme approprié. On en était déjà à un plan bien plus avancé qu'en 1879 lors de la découverte de PICARD. Une foule de connaissances étaient pour ainsi dire retenues en laisse, attelées au théorème de PICARD, et il fallait qu'un jour leur élan fasse craquer les rênes. Ce jour arriva en 1904, et il se passa un phénomène bien curieux.

Imaginons-nous cet attelage dont je parlais, le lourd chariot de PICARD d'une part, de l'autre l'équipage impétueux. Les deux mathématiciens de Berlin qui se sont décidés de prendre part à la course s'installent, l'un dans le chariot, c'est SCHOTTKY, l'autre à cheval sur l'un des coursiers, c'est LANDAU. Ils ne se sont point entendus entre eux, c'est peut-être une coïncidence. Or, c'est LANDAU le premier qui fait partir l'équipage, avec un élan si brusque que les rênes cèdent et le chariot reste en arrière. LANDAU a découvert en effet ce fait inoui dont je vous ai parlé au début, et sous l'effet foudroyant de cette découverte, il s'échappe à toute volée et attire à lui tous les regards. Il ne s'occupe plus du théorème général de PICARD, qu'il n'a pas réussi à prouver. C'est SCHOTTKY, resté en arrière dans le chariot, qui y parvient, en corollaire d'un résultat encore plus extraordinaire que celui de LANDAU, et plus compréhensif! Malheureusement, on ne fait nullement attention à lui. LANDAU revient bien s'atteler au chariot tant perfectionné par SCHOTTKY; seulement, ce n'est plus le chariot de PICARD, c'est le chariot de LANDAU! C'est le théorème de LANDAU qu'on voit découler du beau résultat de SCHOTTKY.

La suite de cette histoire, pleine d'intérêt et d'actualité pour notre sujet, nous mènerait pourtant trop loin. Que cela suffise pour attirer l'attention sur une question qui n'a rien de frivole et qui demanderait d'être approfondie, afin de préserver la recherche mathématique, dans la mesure du possible, de l'effet aveugle de forces capricieuses et arbitraires. Cet effet, particulièrement notoire lorsqu'il s'agit du choix d'un sujet de recherche, s'exerce également sur le choix du style ou la disposition formelle d'un travail. Se dissocier là de l'habitude contemporaine la mieux apte à durer, c'est condamner son œuvre à l'oubli presque certain; et pourtant, l'habitude peut n'être pas très bonne. La mode du style est souvent forcée par des questions de typographie, celle de la forme (directe, indirecte, déductive, inductive, elliptique, complète, etc.) a ses raisons psychologiques et souvent personnelles qui bloquent momentanément des moyens de communication excellents en eux-mêmes. Sans cela, le désaccord dont j'ai fait mention déjà entre ces deux grandes intelligences NEWTON et LEIBNIZ n'aurait peut-être jamais eu lieu, et toute la Science y aurait gagné.

R. C. YOUNG, Londres.

Die graphische Lösung des Doppelsternproblems

Doppelsterne sind die zahlreichen Sternsysteme, in denen zwei Sonnen sich in Keplerschen Ellipsen um den Schwerpunkt des Systems bewegen, während der Schwerpunkt selbst eine gleichförmige, geradlinige Bewegung ausführt. Bei den von

unserem Sonnensystem nicht zu weit entfernten Doppelsternen, deren Komponenten einen verhältnismäßig großen Abstand besitzen, kann die Normalprojektion dieser Bewegung auf eine zur Visierlinie normale Ebene beobachtet werden. Es ist möglich,

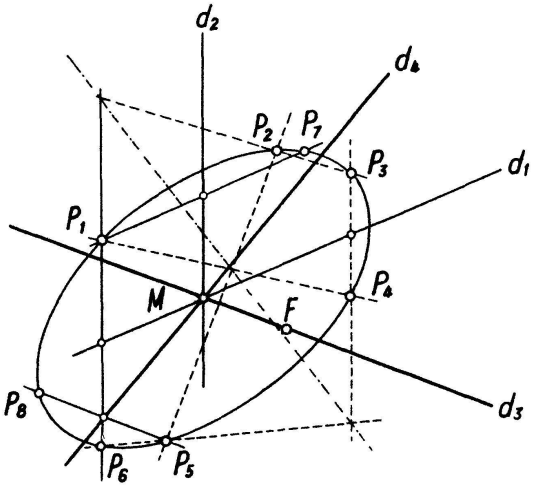

Fig. 1

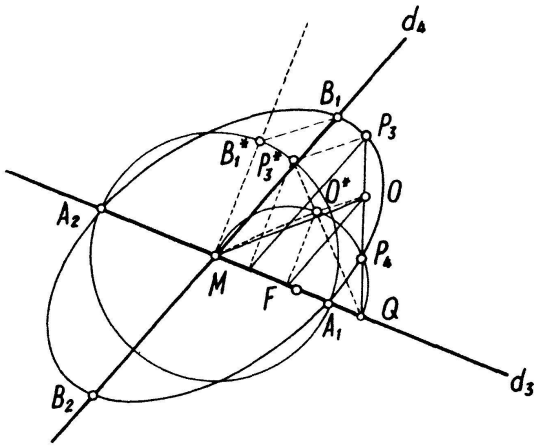

Fig. 2

aus diesen Beobachtungen Lage und Form der Bahnen und die Lage des Schwerpunktes auf der Verbindungsstrecke zu bestimmen. Aus der Lage des Schwerpunktes ergibt sich das Verhältnis der Massen der beiden Sterne. Sind die Entfernung des Systems von der Erde und damit die Dimensionen der Bahnen bekannt, so liefert das dritte Keplersche Gesetz noch die Summe der Massen, so daß sich auch die Massen der einzelnen Sterne berechnen lassen. Abgesehen von dieser Anwendung des dritten Keplerschen Gesetzes läßt sich das Problem vollständig graphisch lösen.

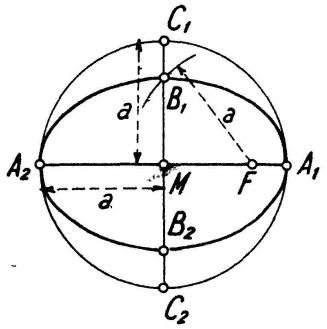

Fig. 3

Wir betrachten zunächst die Bewegung des zweiten Sternes relativ zum ersten Stern. Auch diese Relativbewegung erfolgt in einer Keplerschen Ellipse. F sei die Normalprojektion des ersten Sternes, $P_1P_2P_3P_4P_5$ diejenige von fünf Bahnpunkten des zweiten Sternes (Fig. 1)[1]. Wir bestimmen den Schnittpunkt P_6 einer parallelen Geraden zu P_3P_4 durch P_1 mit der Ellipse durch Anwendung des Satzes von PASCAL (in Figur 1 mit dem Sehnensechseck $P_1P_4P_3P_2P_5P_6$). Die Verbindung der Sehnenmitten von P_1P_6 und P_3P_4 liefert einen Durchmesser d_1 der Ellipse. In gleicher Weise erhalten wir mit dem Schnittpunkt P_7 einer Parallelen zu d_1 durch P_1 den zu d_1 konjugierten, zu P_1P_6 parallelen Durchmesser d_2. Damit ist der Mittelpunkt M der Ellipse gegeben. Eine parallele Sehne zum Durchmesser $d_3 = MF$ (in Figur 1 die Sehne P_5P_8) liefert den zu d_3 konjugierten Durchmesser d_4.

Wir konstruieren die Schnittpunkte von d_3 und d_4 mit der Bahnellipse. Die Ellipse ist schief-affin mit der Affinitätsachse d_3 zu einem Kreis mit dem Mittelpunkt M.

[1]) Zur Erleichterung der Übersicht ist die ganze Konstruktion auf die drei Figuren 1, 2, 4 verteilt. Aus dem gleichen Grunde sind in diesen Figuren die Projektion der Bahnellipse und in Figur 4 auch diejenige des Kreises über ihrer großen Achse eingezeichnet. Für die Konstruktion sind diese Kurven nicht erforderlich.

Wir gehen von dem Mittelpunkt O einer Sehne aus (P_3P_4 in Figur 2). Dem Dreieck MOQ entspricht in der Kreisfigur ein rechtwinkliges Dreieck. Der affine Punkt O^* zu O liegt also auf dem Halbkreis über MQ. Da überdies den Geraden parallel zu d_4 als affine Geraden die Normalen zur Affinitätsachse d_3 entsprechen, ist O^* bestimmt. Dadurch ist die Affinität definiert. Der entsprechende Punkt P_3^* zu P_3 liefert einen Punkt des gesuchten Kreises und damit den Ellipsendurchmesser A_1A_2.

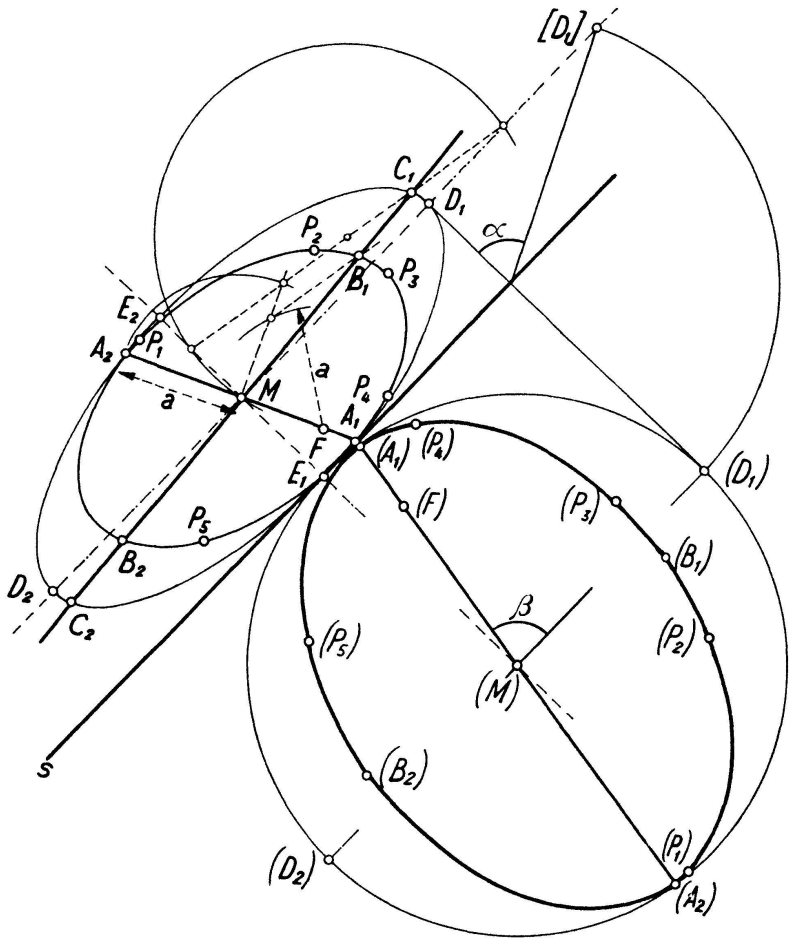

Fig. 4

Mit dem entsprechenden Punkt B_1 zu B_1^* erhalten wir noch den konjugierten Durchmesser B_1B_2. Mit diesen Konstruktionen haben wir die ursprüngliche Bestimmung der Ellipse durch fünf Punkte ersetzt durch die für die weiteren Konstruktionen vorteilhaftere Bestimmung durch den Durchmesser des Punktes F und den dazu konjugierten Durchmesser. Dem Astronomen stehen in der Regel nicht nur die fünf zur Bestimmung notwendigen Punkte zur Verfügung. Er wird daher auf Grund des gesamten Beobachtungsmaterials unter Verwendung der Ausgleichsrechnung, ausgehend von dem gefundenen Resultat, noch die Ellipse bestimmen, welche den kleinsten Gesamtfehler gegenüber den Beobachtungen liefert[1]).

[1]) Vgl. WALDMEIER, *Einführung in die Astrophysik* (Birkhäuser, Basel 1949), Seite 205–216. Die Seite 208 erwähnte «graphische Lösung» bezieht sich nur auf ein Teilproblem, die Bestimmung der Richtung der Knotenlinie unter Verwendung des Kreises über der großen Achse der Bahnellipse.

Durch die gegenseitige Lage der Punkte A_1, A_2, F ist die numerische Exzentrizität und damit die Form, nicht aber die Größe der Bahnellipse gegeben (Fig. 3). Wir denken uns zur Bahnellipse den Kreis über der großen Achse hinzu. Da durch die Projektion das Verhältnis $MB_1 : MC_1$ nicht verändert wird, lassen sich die Punkte $C_1 C_2$ auch in der Projektion eintragen (Fig. 4). Wir kennen damit von der Projektion des Kreises die konjugierten Durchmesser $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$. Die bekannte Konstruktion von RYTZ[1]) liefert deren große und kleine Achse, $D_1 D_2$ und $E_1 E_2$. Die Spur s der

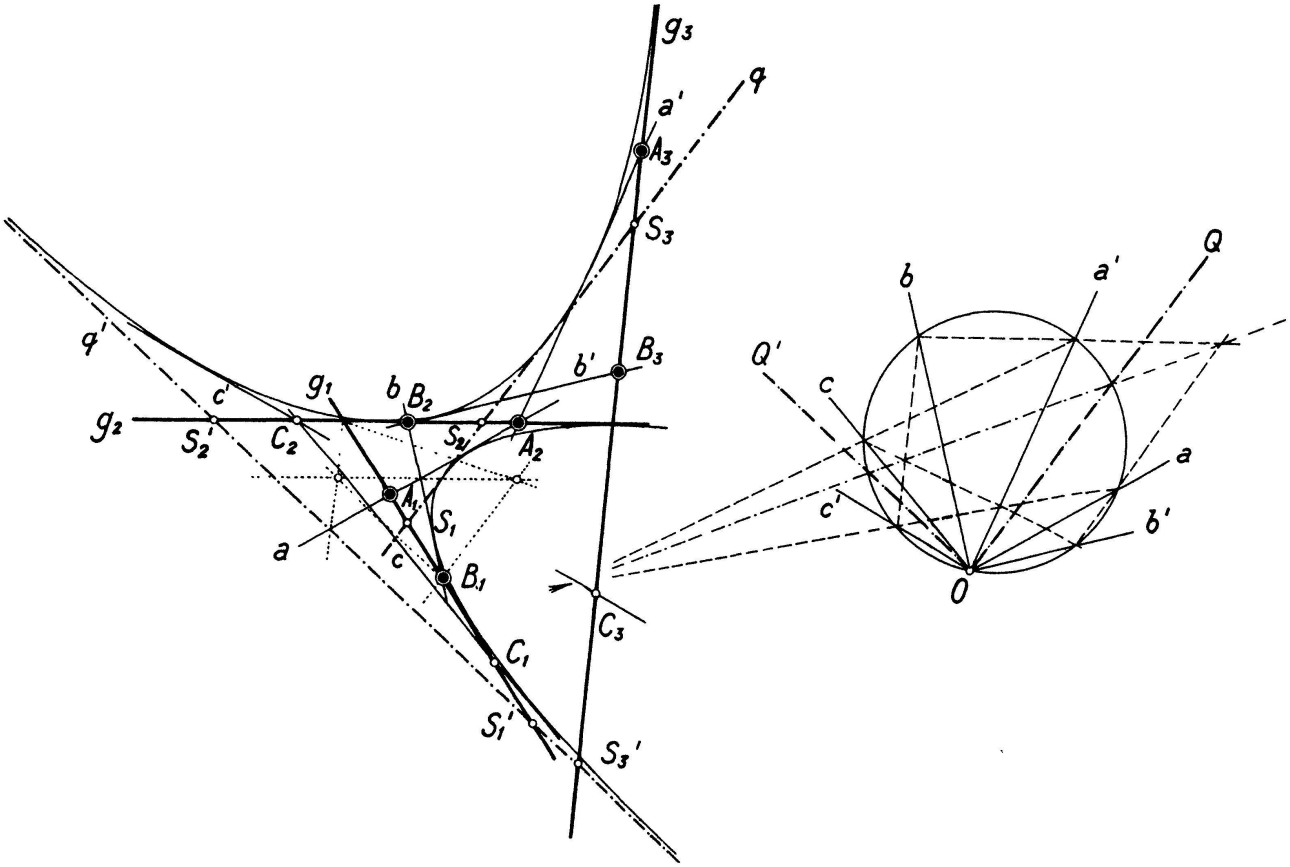

Fig. 5

Ebene, welche die Bahnellipse und den zugehörigen Kreis mit dem Durchmesser $D_1 D_2$ enthält, ist parallel zu $D_1 D_2$. Da für die Kote des Mittelpunktes M noch keine Festsetzung getroffen ist, können wir für s eine beliebige Parallele zu $D_1 D_2$ wählen. In Figur 4 ist s durch E_1 gelegt, um Projektion und Umlegung voneinander zu trennen. Die Konstruktion der Umlegung des Kreises und damit auch der Bahnellipse ist aus der Figur ersichtlich. Sie liefert Form und Größe der Bahnellipse, dazu den Winkel β zwischen der großen Achse der Ellipse und der Spur s und den Neigungswinkel α der Bahnebene gegen die Projektionsebene. Durch s und α sind zwei zur Projektionsebene symmetrische Bahnebenen definiert. Welche derselben für den betrachteten Stern in Frage kommt, läßt sich nur durch spektroskopische Beobachtungen, durch Bestimmung der Bewegungen normal zu unserer Projektionsebene entscheiden.

Wir wenden uns der zweiten Aufgabe zu, der Bestimmung der Lage des Schwerpunktes des Doppelsternsystems. Auch für die der Beobachtung zugängliche Normal-

[1]) Vgl. zum Beispiel FLÜKIGER, *Leitfaden der darstellenden Geometrie* (Orell Füßli, Zürich 1943), Seite 40.

projektion gilt wie für die Bewegung im Raum der Satz, daß die Projektion des Schwerpunktes eine geradlinige, gleichförmige Bewegung ausführt und die Verbindungsstrecke der Sternorte in konstantem Verhältnis teilt. Es seien (Fig. 5) A_1, B_1 auf g_1, A_2, B_2 auf g_2 und A_3, B_3 auf g_3 die Normalprojektionen der Sternorte für drei Zeiten. Dann ist als Projektion der Bahn des Schwerpunktes eine Gerade gesucht, welche die drei Strecken im gleichen Verhältnis teilt. Die drei Punktepaare definieren drei ähnliche Punktreihen. C_1, C_2, C_3 sei irgendeine weitere Gruppe entsprechender Punkte dieser Reihen (in Figur 5 sind die Punkte gewählt, welche die Strecken AB außerhalb im Verhältnis 2:1 teilen). Auch die gesuchten Schwerpunktslagen S_1, S_2, S_3

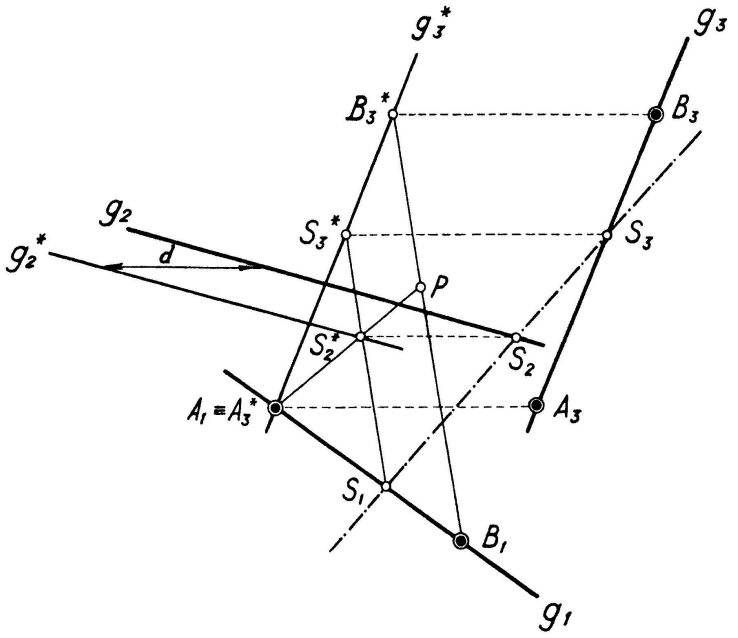

Fig. 6

bilden eine Gruppe entsprechender Punkte. Die Verbindungsgeraden $a = A_1A_2$, $b = B_1B_2$, $c = C_1C_2$, ... entsprechender Punkte von g_1 und g_2 umhüllen eine Parabel; ebenso die Verbindungsgeraden $a' = A_2A_3$, $b' = B_2B_3$, $c' = C_2C_3$, ... entsprechender Punkte von g_2 und g_3[1]). Die beiden Parabeln haben zwei Tangenten, g_2 und die unendlich ferne Gerade, gemeinsam. Die beiden weiteren gemeinsamen Tangenten liefern die Lösung unseres Problems, da sie die Strecken A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 im gleichen Verhältnis teilen. Ihre Bestimmung entspricht einer Fundamentalaufgabe der projektiven Geometrie, die sich im vorliegenden Falle besonders einfach gestaltet. Die von A_2, B_2, C_2, ... ausgehenden Tangentenpaare a, a'; b, b'; c, c'; ... definieren auf der unendlich fernen Geraden zwei projektive Punktreihen. Wir übertragen dieselben in bekannter Weise von O aus auf einen Hilfskreis. Den Doppelpunkten dieser Projektivität entsprechen von einem Punkte der Geraden g_2 ausgehende Tangenten an beide Parabeln, die in die gleiche Gerade fallen. Durch OQ und OQ' sind also die Richtungen der gesuchten Geraden gegeben. Der Satz von BRIANCHON (in der Figur angewandt auf die Tangentensechsseite abg_1g_2 unendlich ferne Gerade und die gesuchten Geraden) liefert noch je einen Punkt der gemeinsamen Parabeltangenten und

[1]) In Figur 5 sind diese Kurven übersichtshalber eingezeichnet. Für die Konstruktion sind sie nicht notwendig.

damit die Lösungen q und q'. Von diesen besitzt nur q für das astronomische Problem Bedeutung, da der Schwerpunkt ein innerer Punkt der Strecken AB sein muß. Eine Probe ist dadurch gegeben, daß sich die Strecken $S_1 S_2$ und $S_2 S_3$ wie die zugehörigen Zeitabschnitte verhalten müssen.

Eine einfachere Lösung erhalten wir, wenn wir die Zeiten t_1, t_2, t_3 für die betrachteten Sternorte zur Konstruktion benutzen. Die Aufgabe wird dadurch überbestimmt. Für die Zeit t_2 benötigen wir nur noch die Lage der Geraden g_2, nicht aber diejenige der Punkte A_2 und B_2. Wir betrachten (Fig. 6) die Bewegung der Sterne bezogen auf ein Koordinatensystem, das sich relativ zum Ausgangssystem in der Richtung $A_1 A_3$ mit der Geschwindigkeit $A_1 A_3/(t_3 - t_1)$ gleichförmig parallel verschiebt. Auch in diesem System wird die Bewegung des gesuchten Schwerpunktes gleichförmig und geradlinig. Ist $A_1 B_1$ die Stellung im neuen System zur Zeit t_1, so ist $A_3^* B_3^*$ $(A_3^* \equiv A_1)$ die Stellung zur Zeit t_3. Die Verbindungsgerade g_2 der Sternorte zur Zeit t_2 erhalten wir durch Parallelverschiebung von g_2 in der Richtung $A_3 A_1$ um die Strecke $d = A_1 A_3\,(t_2 - t_1)/(t_3 - t_1)$. Da die Verbindungsgerade der drei Schwerpunktslagen die Strecken $A_1 B_1$ und $A_3^* B_3^*$ im gleichen Verhältnis teilt, erfolgt die Schwerpunktsbewegung parallel zu $B_1 B_3^*$. Teilen wir $B_1 B_3^*$ im Punkte P innerhalb im Verhältnis $(t_2 - t_1) : (t_3 - t_2)$, so muß der Schwerpunkt S_2^* auf $A_1 P$ und auf g_2^* liegen. Damit ist die Lösung $S_1^* S_2^* S_3^*$ im neuen Koordinatensystem gegeben. Aus ihr folgt sofort die Lösung $S_1 S_2 S_3$ im Ausgangssystem. S_2 wird die (in der Figur 6 nicht eingetragene) Strecke $A_2 B_2$ im gleichen Verhältnis teilen müssen wie S_1 und S_3 die Strecken $A_1 B_1$ und $A_3 B_3$, wenn die Sternorte und Zeiten miteinander in Einklang stehen. Für die Verwertung des gesamten Beobachtungsmaterials gilt die gleiche Bemerkung wie beim ersten Problem. H. SCHÜEPP, Zollikon-Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 38. a) Im Jahre 0 leben tausend Individuen, welche die nullte Generation bilden. Nach einem Jahre sterben sie ab und hinterlassen Nachkommen, die erste Generation usw. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum k (0, 1, 2, ..., 20) «Kinder» hat, sei p_k, so daß also $p_0 + p_1 + \cdots + p_{20} = 1$ gilt. Ferner sei die Erwartung $0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2\,p_2 + \cdots + 20\,p_{20} = 1$. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum nach n Jahren keine Nachkommen mehr hat, gleich $x(n)$. Diese Folge (für $n = 1, 2, \ldots$) ist nirgends abnehmend und $\leqq 1$. Sie besitzt also eine Grenze x. Die Aufgabe besteht in der Berechnung und Deutung dieses x.

b) Im Jahre 0 sollen alle Individuen verschiedene Familiennamen haben, die sich vererben. In der 1000. Generation sei die Anzahl der Individuen 2000. Was läßt sich über die Anzahl der noch existierenden Familiennamen aussagen? A. SPEISER (Basel).

Lösung des Aufgabenstellers: Es gilt die Formel

$$x\,(n+1) = p_0 + p_1\,x(n) + p_2\,x^2(n) + \cdots + p_{20}\,x^{20}(n).$$

In der Grenze für $n = \infty$ und wegen der Stetigkeit der Wurzeln als Funktionen der Koeffizienten gilt: $p_0 + (p_1 - 1)\,x + p_2\,x^2 + \cdots + p_{20}\,x^{20} = 0$. Diese Gleichung hat die Wurzel $x = 1$ und nach der Descartesschen Zeichenregel noch genau eine positive Wurzel. Nun verschwindet die Ableitung $p_1 - 1 + 2\,p_2\,x + \cdots + 20\,p_{20}\,x^{19}$ für $x = 1$ nach der «Erwartung». Daher ist auch die zweite Wurzel gleich 1. Die Paradoxie besteht nun darin, daß die Wahrscheinlichkeit für Nachkommen verschwindet, während doch