Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

en O_1 et dans le voisinage de ce point. Construisons aussi un point M'', en partant de O_1'', comme on construirait M' en partant de O_1'. Si l'on remplace la droite $O_1'M'$ par $O_1''M''$, dans le passage à la limite, on peut montrer qu'on ne fait que négliger des infiniment petits d'un ordre supérieur ou égal au second par rapport à l'arc O_1O_1''. Il s'ensuit que la limite du point d'intersection de $O_1''M''$ et de O_1M est aussi le point c. On peut, en résumé, remplacer d par son cercle osculateur au point O_1 pour trouver les centres de courbure c et c' de Σ à l'aide de la construction qu'on vient d'établir. Celle-ci nous permet donc de déterminer le cercle osculateur en un point quelconque M d'une anallagmatique Σ à condition qu'on sache construire celui de sa déférente d au point correspondant. C'est, en particulier, le cas si d est une conique quelconque et si, par suite, Σ est une quartique bicirculaire générale.

A. LOEFFLER, Rolle.

Kleine Mitteilungen

Der Hyperbeltangens in der Biologie

Manche Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung geben als Anwendung der Exponentialfunktion und gleichzeitig als Beispiel einer einfachen Differentialgleichung das bekannte Wachstumsgesetz der Biologie

$$\frac{dN}{dt} = k\,N, \tag{1}$$

wo N die Anzahl der Individuen einer isoliert genommenen Population und k eine Wachstumskonstante bedeuten. Die Lösung von (1) lautet:

$$N = N_0\,e^{k\,t}.$$

Nach dieser Funktion würde das Wachstum immer schneller, um schließlich unbegrenzt zuzunehmen; und doch wachsen die Bäume nicht in den Himmel, einmal hört der Vermehrung auf, weil der Raum fehlt und die Nahrung ungenügend wird. Es handelt sich also darum, diesen hemmenden Faktoren im Ansatz (1) Rechnung zu tragen. Die Konstante k soll deshalb aus einer Wachstumskonstanten ε und einer Hemmungskonstanten λ, die ihrerseits proportional der Anzahl der Individuen ist, in folgender Weise zusammengesetzt werden:

$$k = \varepsilon - \lambda\,N.$$

Das Wachstumsgesetz nimmt damit die Form

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda\,N)\,N \tag{2}$$

an. Man kann die rechte Seite $\varepsilon\,N - \lambda\,N^2$ auch als die ersten Glieder der Taylor-Entwicklung der Wachstumsgeschwindigkeit dN/dt ansehen.[1]

Die Differentialgleichung (2) ist separierbar, und durch elementare Integration mittels einer Partialbruchzerlegung erhält man die Lösung:

$$N = \frac{\varepsilon}{e^{-\varepsilon(t-t_0)} + \lambda}\,. \tag{3}$$

Daraus ersieht man sofort, daß für $t \to \infty$ $N_\infty = \varepsilon/\lambda$ wird, also ein endlicher Grenzwert existiert, der nur von den beiden Konstanten ε und λ abhängt.

Die Integrationskonstante t_0 soll so festgesetzt werden, daß für $t = 0$

$$N_0 = \frac{1}{2} N_\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

wird. Diese Wahl des Zeitnullpunktes ist deshalb zweckmäßig, weil die Lösung dadurch die einfachste Form gewinnt. Man findet nun aus (3)

$$t_0 = \frac{\ln \lambda}{\varepsilon}$$

und damit die Lösung

$$N = N_\infty \frac{e^{\varepsilon t}}{1 + e^{\varepsilon t}} . \tag{4}$$

Dies ist die Gleichung der sogenannten logistischen Kurve von VERHULST-PEARL.

Subtrahiert man auf beiden Seiten von (4) $N_\infty/2$, so ergibt sich durch einfaches Ausrechnen:

$$N - \frac{N_\infty}{2} = \frac{N_\infty}{2} \cdot \frac{e^{\varepsilon t} - 1}{e^{\varepsilon t} + 1} = \frac{N_\infty}{2} \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Es ist also:

$$\underline{N = \frac{N_\infty}{2} \left(\operatorname{tgh} \frac{\varepsilon}{2} t + 1\right)} . \tag{5}$$

Bemerkenswert ist hier das Auftreten des Hyperbeltangens, also einer tabellarisierten Funktion. Dieser einfache Zusammenhang der logistischen Funktion mit dem Hyperbeltangens scheint den Biologen entgangen zu sein, jedenfalls ist in der einschlägigen Literatur darüber nichts zu finden. An Hand von (5) läßt sich nun der Wachstumsverlauf einer Population klar überblicken; ebenfalls lassen sich die Konstanten ε und λ leicht aus den Werten N_w und $\dot{N}_w = (dN/dt)_{t=0}$ berechnen:

$$\varepsilon = 2 \frac{\dot{N}_w}{N_w} , \quad \lambda = \frac{\dot{N}_w}{N_w^2} .$$

Die Gültigkeit des Gesetzes (5) wurde in mehreren Fällen untersucht, zum Beispiel am Wachstum einer *Drosophila*population oder an der Bevölkerung von Nordamerika. Ebenso ist es gut bestätigt für das Wachstum von Planktonkulturen.

Einer (2) analogen Differentialgleichung genügt das Gesetz der Wundheilung von ROBERTSON[1]).

Hinzugefügt sei noch, daß (2) nur dann gilt, wenn es sich um eine Population einer einzigen Art handelt. Sind mehrere Arten vorhanden, von denen etwa die eine die andere frißt, so werden die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Von solchen Problemen handelt u. a. das lesenswerte Buch von U. D'ANCONA, *Der Kampf ums Dasein*[2]). Die mathematischen Grundlagen dieses Zweiges der theoretischen Biologie stammen von V. VOLTERRA.

E. ROTH-DESMEULES, Luzern.

Aufgaben

Aufgabe 46. In una curva razionale normale dello spazio S_n ad n dimensioni è inscritta una piramide variabile di $n + 1$ vertici avente per baricentro un punto fisso B: determinare l'inviluppo delle sue facce.

A. LONGHI (Lugano).

[1]) R. FUETER, *Das mathematische Werkzeug* (Orell Füßli, Zürich 1947), S. 192.

[2]) U. D'ANCONA, *Der Kampf ums Dasein* (Borntraeger, Berlin 1939).