Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 6 (1951)

Heft: 1

Artikel: Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire

Autor: Loeffler, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15570

5. $Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96\,000{,}25} - \frac{1}{42\,000} - \frac{1}{54\,000}} = 9{,}5330\,0107\,169 \cdot 10^{2378} < \binom{8000}{3500}$,

$$\binom{8000}{3500} < Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96\,000} - \frac{1}{42\,000{,}25} - \frac{1}{54\,000{,}25}} = 9{,}5330\,0107\,412 \cdot 10^{2378}.$$

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß beim 8000maligen Werfen einer Münze gerade Schrift 3500mal erscheint

$$5{,}4861\,0771\,05 \cdot 10^{-30} < w < 5{,}4861\,0771\,19 \cdot 10^{-30}.$$

Diese Beispiele zeigen, daß die Annäherung schon bei kleinem n ausgezeichnet ist, so daß die Schranken wohl meist genügen werden. P. BUCHNER, Basel.

Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire

Considérons une courbe anallagmatique générale Σ. On sait qu'elle est l'enveloppe d'un cercle C qui varie en restant orthogonal à un cercle fixe D, appelé cercle directeur, tandis que son centre décrit une courbe fixe d, appelée déférente.

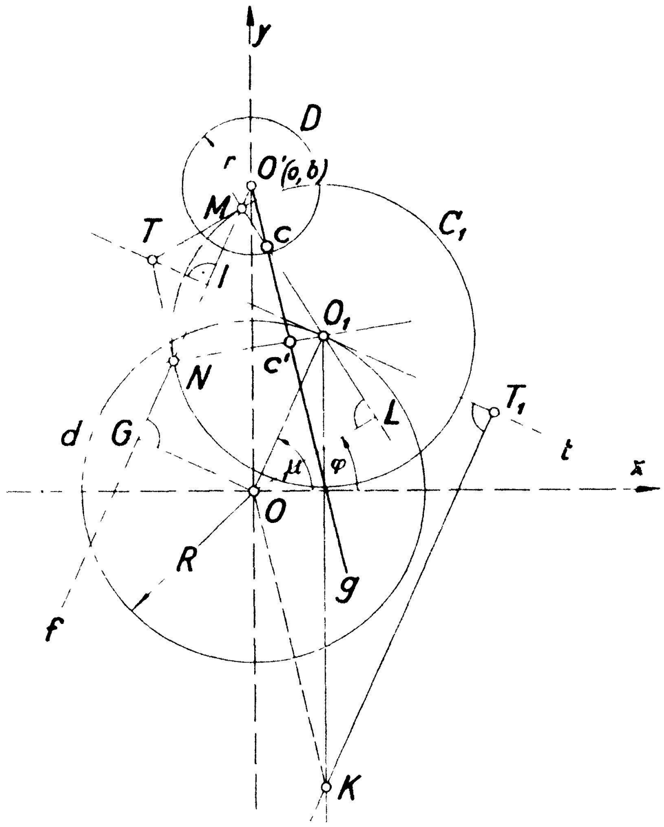
Connaissant D et un point O_1 de d, on peut évidemment construire le cercle C de centre O_1, que nous appellerons C_1, et il est de plus aisé de trouver ses points de contact avec Σ.

Soit, en effet, C_2 un cercle C voisin de C_1, O_2 son centre. Soient M' et N' les points communs à C_1 et C_2. Ces cercles étant orthogonaux à D, leur axe radical $M'N'$ passe par le centre O' de D: il est, en outre, perpendiculaire à la ligne des centres O_1O_2. D'après la théorie des enveloppes, si l'on fait tendre O_2 vers O_1, les points M' et N' tendent vers les points où C touche son enveloppe, points que nous appellerons M et N. La droite O_1O_2 ayant comme position limite la tangente t à d en O_1, on voit qu'on obtiendra les points M et N à l'intersection du cercle C_1 et de la perpendiculaire f abaissée de O' sur t.

De plus, C_1 étant tangent à la courbe Σ en M et N, on connaît aussi les normales en ces points qui sont les droites O_1M et O_1N. Sur ces normales se trouvent les centres de courbure c et c' de Σ aux points M et N. Le problème de la construction de ces centres à la règle et au compas est resté jusqu'à présent irrésolu. On peut cependant le résoudre aisément si l'on sait construire le cercle osculateur en tout point de d. Les calculs développés plus loin m'ont en effet amené, dans ce cas, à la solution suivante:

On construit le centre de courbure O de la déférente d au point O_1; on détermine le pôle T de la droite f par rapport à C_1; puis le symétrique T_1 de T par rapport à O_1. On élève la perpendiculaire à t en T_1, et l'on mène par O_1 la parallèle à $O'O$. Ces deux droites se coupent en un point K. On mène enfin par O' la parallèle g à OK. La droite g coupe O_1, M et O_1N aux centres de courbure c et c' cherchés.

Démonstration. — Remarquons d'abord que O', c et c' sont en ligne droite. En effet, si r est le rayon de D, on sait qu'une inversion de centre O' et de puissance r^2 transforme la quartique en elle-même. Les points M et N se correspondent dans cette inversion, ainsi que leurs cercles osculateurs. Il s'ensuit que les centres de ces deux cercles sont alignés sur O'. Montrons ensuite que les droites $O'c$ et OK sont parallèles,



en calculant leurs coefficients angulaires. Examinons en premier lieu le cas où la déférente d est un cercle de rayon R. Choisissons son centre O comme origine d'un système d'axes rectangulaires dont l'axe des y passe par le centre $O'(o, b)$ du cercle directeur D.

L'équation de D, dans ce système, est:

$$x^2 + y^2 - 2\,b\,y + b^2 - r^2 = 0.$$

Déterminons la position de O_1 sur d par le paramètre

$$u = \widehat{Ox, OO_1}.$$

Les coordonnées de O_1 sont alors:

$$x_1 = R\cos u, \quad y_1 = R\sin u.$$

Le cercle C_1 de centre O_1 étant orthogonal à D, son rayon r_1 est donné par la relation:

$$r_1^2 = R^2 - 2\,b\,R\sin u + b^2 - r^2. \tag{1}$$

a) Pour calculer le coefficient angulaire de g, menons OL perpendiculairement à O_1M, et soit:

$$\widehat{Ox, OL} = \varphi. \qquad (0 < \varphi < 2\pi)$$

Dans le triangle rectangle O_1OL, l'angle aigu O_1OL vaut $|u - \varphi|$, quelle que soit la position du point O_1; de sorte que l'expression

$$OL = R \cos (u - \varphi)$$

est toujours positive.

L'équation de la droite O_1M sous forme normale est, par suite:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R \cos (u - \varphi) = 0. \tag{2}$$

Les paramètres u et φ sont reliés par une relation. Pour l'établir, menons la droite OG perpendiculairement à f. Les angles u et $O'OG$ ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, on a:

$$|OG| = |OO' \cos u| = |b \cos u|.$$

Soit I le pied de f sur t. On a:

$$\widehat{MO_1I} = \widehat{LOO_1} = |u - \varphi|.$$

Donc: $$O_1I = O_1M \cos (u - \varphi) = r_1 \cos (u - \varphi).$$

O_1IGO étant un rectangle, les longueurs O_1I et OG sont égales, et, par suite, on a l'équation:

$$b \cos u = \pm r_1 \cos (u - \varphi). \tag{3}$$

r_1 étant fonction de u d'après (1), la relation (3) permet de considérer u comme fonction de φ.

Le centre de courbure c est la limite du point d'intersection de O_1M et d'une autre normale à la quartique lorsque cette seconde droite tend vers la première. Donc, si $F(x, y, \varphi) = 0$ est l'équation de O_1M, les coordonnées x_0 et y_0 du point c sont les solutions du système:

$$F = x \cos \varphi + y \sin \varphi - R \cos (u - \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi + R \sin (u - \varphi)(u' - 1) = 0.$$

On en tire:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= R (\sin \varphi \sin (u - \varphi)\, u' + \cos u) \\ y_0 &= R [-\cos \varphi \sin (u - \varphi)\, u' + \sin u] \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

u' désigne la dérivée de u par rapport à φ. Nous la calculerons en utilisant les relations (1) et (3).

En dérivant (1) par rapport à u, il vient:

$$2\, r_1 r_1' = -2\, b R \cos u. \tag{5}$$

En éliminant r_1 entre (5) et (3), on trouve:

$$r_1' = \mp R \cos (u - \varphi).$$

D'après (3), on a: $$r_1 = \pm \frac{b \cos u}{\cos(u - \varphi)}.$$

Dérivons (3) par rapport à φ. Il vient:

$$-b \sin u\, u' = \pm r_1' \cos(u - \varphi)\, u' \mp r_1 \sin(u - \varphi)(u' - 1).$$

Remplaçons r_1' et r_1 par leurs expressions en fonction de u et φ et résolvons par rapport à u'; on obtient finalement:

$$u' = \frac{b \cos u \sin(u - \varphi)}{R \cos^3(u - \varphi) - b \sin \varphi}.$$

Introduisons cette valeur de u' dans les formules (4). Utilisons les valeurs de x_0 et y_0 qu'on obtient ainsi pour calculer le coefficient angulaire de la droite $O'c$:

$$m = \frac{y_0 - b}{x_0}.$$

On trouve, après quelques transformations, et en tenant compte de (3):

$$m = \frac{R \sin u - (r_1^2/b \cos^2 u)}{R \cos u} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2 R^2}{b\, x_1^3}. \tag{6}$$

b) Pour trouver rapidement le coefficient angulaire m_K de OK, bornons-nous au cas de la figure. On en tire, en désignant par $x_K\, y_K$ les coordonnées de K:

$$m_K = \frac{y_K}{x_K} = \frac{y_1 - KO_1}{x_1} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{O_1T_1}{x_1 \cos u}.$$

Or: $$O_1T_1 = O_1T = \frac{r_1}{\cos(u - \varphi)} = \frac{r_1^2}{b \cos u},$$

puisque $r_1 \cos(u - \varphi) = b \cos u$, donc:

$$m_K = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2}{b\, x_1 \cos^2 u} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2 R^2}{b\, x_1^3}.$$

Ce résultat est d'ailleurs valable quelles que soient les positions des cercles de la figure, comme le montrerait un calcul fait suivant les méthodes habituelles de la géométrie analytique.

D'après la formule (6), on a:

$$m_K = m$$

et on voit que la droite g est parallèle à OK. La construction à démontrer est donc établie dans le cas où d est un cercle. Le centre de d se confond alors avec le centre de courbure O de d au point O.

Supposons maintenant que l'enveloppe Σ de C_1 soit une anallagmatique ayant comme déférente d une courbe à courbure continue. Désignons par O_1 un point quelconque de d et par M un des deux points correspondants de Σ. M admet O_1M comme normale. Le centre de courbure c est la limite du point d'intersection de O_1M et d'une normale infiniment voisine $O_1'M'$. Supposons que, dans ce processus, on remplace le point O_1', pris sur d, par un point O_1'', pris sur le cercle osculateur de d

en O_1 et dans le voisinage de ce point. Construisons aussi un point M'', en partant de O_1'', comme on construirait M' en partant de O_1'. Si l'on remplace la droite $O_1'M'$ par $O_1''M''$, dans le passage à la limite, on peut montrer qu'on ne fait que négliger des infiniment petits d'un ordre supérieur ou égal au second par rapport à l'arc O_1O_1''. Il s'ensuit que la limite du point d'intersection de $O_1''M''$ et de O_1M est aussi le point c. On peut, en résumé, remplacer d par son cercle osculateur au point O_1 pour trouver les centres de courbure c et c' de Σ à l'aide de la construction qu'on vient d'établir. Celle-ci nous permet donc de déterminer le cercle osculateur en un point quelconque M d'une anallagmatique Σ à condition qu'on sache construire celui de sa déférente d au point correspondant. C'est, en particulier, le cas si d est une conique quelconque et si, par suite, Σ est une quartique bicirculaire générale.

A. LOEFFLER, Rolle.

Kleine Mitteilungen

Der Hyperbeltangens in der Biologie

Manche Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung geben als Anwendung der Exponentialfunktion und gleichzeitig als Beispiel einer einfachen Differentialgleichung das bekannte Wachstumsgesetz der Biologie

$$\frac{dN}{dt} = k\,N, \tag{1}$$

wo N die Anzahl der Individuen einer isoliert genommenen Population und k eine Wachstumskonstante bedeuten. Die Lösung von (1) lautet:

$$N = N_0\, e^{k\,t}.$$

Nach dieser Funktion würde das Wachstum immer schneller, um schließlich unbegrenzt zuzunehmen; und doch wachsen die Bäume nicht in den Himmel, einmal hört der Vermehrung auf, weil der Raum fehlt und die Nahrung ungenügend wird. Es handelt sich also darum, diesen hemmenden Faktoren im Ansatz (1) Rechnung zu tragen. Die Konstante k soll deshalb aus einer Wachstumskonstanten ε und einer Hemmungskonstanten λ, die ihrerseits proportional der Anzahl der Individuen ist, in folgender Weise zusammengesetzt werden:

$$k = \varepsilon - \lambda\,N.$$

Das Wachstumsgesetz nimmt damit die Form

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda\,N)\,N \tag{2}$$

an. Man kann die rechte Seite $\varepsilon\,N - \lambda\,N^2$ auch als die ersten Glieder der Taylor-Entwicklung der Wachstumsgeschwindigkeit dN/dt ansehen.[1]

Die Differentialgleichung (2) ist separierbar, und durch elementare Integration mittels einer Partialbruchzerlegung erhält man die Lösung:

$$N = \frac{\varepsilon}{e^{-\varepsilon(t-t_0)} + \lambda}. \tag{3}$$

Daraus ersieht man sofort, daß für $t \to \infty$ $N_\infty = \varepsilon/\lambda$ wird, also ein endlicher Grenzwert existiert, der nur von den beiden Konstanten ε und λ abhängt.