

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1951)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Polarentheorie der Eilinien  
**Autor:** Locher-Ernst, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15568>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band VI

Nr. 1

Seiten 1–24

Basel, 15. Januar 1951

## Polarentheorie der Eilinien

1. In der reellen projektiven Ebene sei eine Eilinie  $O$  (Oval) als Grundkurve gegeben.  $O$  ist eine geschlossene Kurve, die mit jeder Geraden höchstens zwei gemeinsame Punkte hat. Sie besitzt keine Wendetangenten, keine Spitzen, keine mehrfachen Punkte und keine mehrfachen Tangenten. Wir setzen voraus, daß in jedem Punkte von  $O$  eine Tangente existiert, die sich bei stetigem Durchlaufen der Punkte von  $O$  stetig ändere. Dabei schließen wir Winkelecken und Strecken als Bestandteile von  $O$  aus.

Ist  $O$  ein Kegelschnitt, so bestimmt dieser die bekannte Polaritätsbeziehung. Umgekehrt ist durch eine Polarität in der Ebene ein Kegelschnitt bestimmt. Soweit ich mich in der ausgedehnten Literatur über Eilinien umgesehen habe, wurde das folgende naheliegende Problem bisher nicht in Angriff genommen: *Wie läßt sich für ein beliebiges Oval, das den genannten Bedingungen genügt, eine Beziehung Pol–Polare erklären?* (Da hier nicht vorausgesetzt wird, daß  $O$  algebraisch ist, können wir nicht an die für algebraische Kurven erklärte allgemeine Polarentheorie anknüpfen.)

Im folgenden bringen wir kurz einige Ergebnisse aus der Beschäftigung mit diesem Problem. Man stößt auf interessante Figuren, die in ein bisher nicht beachtetes Gebiet der anschaulichen Geometrie führen.

2. Das Oval  $O$  zerlegt als Punktgebilde die Ebene als Punktfeld in zwei Gebiete, das innere und das äußere Punktgebiet von  $O$ . Als Strahlengebilde (Gesamtheit der Tangenten) gliedert  $O$  die Ebene als Strahlenfeld in zwei Strahlenbereiche: der innere Strahlenbereich besteht aus den Geraden, die  $O$  nicht treffen, der äußere Strahlenbereich wird durch die  $O$  schneidenden Geraden gebildet. Ein innerer Punkt hat mit dem Strahlengebilde  $O$  keine Gerade gemeinsam; eine innere Gerade hat mit dem Punktgebilde  $O$  keinen Punkt gemeinsam.

3. Das Oval  $O$  gibt zunächst zu den folgenden einfachen Konstruktionen Anlaß:

A. Ist  $P$  ein beliebiger innerer Punkt, so kann man jede Gerade durch  $P$  mit  $O$  als Punktgebilde schneiden, in den Schnittpunkten die Tangenten legen und deren Schnittpunkt bestimmen. Man erhält so die zu  $P$  gehörende Punktreihe  $l(P)$ .

B. Ist  $\phi$  eine beliebige innere Gerade, so kann man jeden Punkt von  $\phi$  mit  $O$  als Strahlengebilde verbinden, in den Verbindungsgeraden die Berührungspunkte aufsuchen und deren Verbindungsgerade bestimmen. Man erhält so das zu  $\phi$  gehörende Strahlenbüschel  $L(\phi)$ .

Ist  $O$  ein Kegelschnitt, so stellt  $l(P)$  eine Gerade,  $L(p)$  einen Punkt dar. Die Zeichnungen<sup>1)</sup> 1 bis 5 zeigen die Verhältnisse für symmetrisch gewählte Ovale. In den Figuren 1, 2 und 5 wurden zu verschiedenen inneren Punkten die Kurven  $l(P)$  gezeichnet. Figur 3 zeigt im Punktinnern die Hüllkurven von drei Büscheln  $L(p)$ ; die unterste Kurve entspricht der unendlichfernen Geraden, die mittlere der obersten Geraden in der Zeichnung. In Figur 4 entspricht die mittlere Hüllkurve der horizontalen Geraden, sie ist dreispitzig; dreht man die Gerade in zwei andere Lagen, so ergibt sich im vorliegenden Fall eine fünf- bzw. siebenspitzige Form.

4. Ist  $P$  ein Punkt des Punktgebildes  $O$ , so liefert die sinngemäß angewendete Konstruktion 3A als zugehörige  $l$ -Kurve eine gerade Punktreihe, nämlich die Tangente in  $P$ . Ist  $p$  eine Gerade des Strahlengebildes  $O$ , so liefert 3B ein zentrisches Strahlenbüschel mit dem Berührungsrand von  $p$  als Mittelpunkt.

5. Die  $l(P)$ -Kurven und  $L(p)$ -Büschel – wobei wir hier  $P$  und  $p$  als innere Elemente von  $O$  voraussetzen – besitzen eine Reihe von Eigenschaften, die unabhängig von der besonderen Wahl des Ovals sind. Da sie für  $l$  und  $L$  dual sind, genügt die Formulierung für die  $l$ -Kurven. Zum Beispiel:

- a) Jede  $l$ -Kurve verläuft ganz im äußeren Punktgebiet.
- b) Jede  $l$ -Kurve ist eine einteilige geschlossene Kurve.
- c) Mit jeder Tangente von  $O$  und mit jeder äußeren Geraden von  $O$  hat jede  $l$ -Kurve genau einen Punkt gemeinsam.
- d) Jede  $l$ -Kurve ist von ungerader Ordnung<sup>2)</sup>.
- e) Eine  $l$ -Kurve hat keine Spitzen und keine Doppelpunkte.
- f) Durch zwei Punkte auf einer inneren Geraden ist genau eine  $l$ -Kurve bestimmt.
- g) Zwei  $l$ -Kurven haben einen und nur einen gemeinsamen Punkt.
- h) Bedeuten  $2w + 3$  und  $d$  die Anzahlen der Wendetangenten und der Doppeltangenten, so sind  $w$  und  $d$  beide gerade oder beide ungerade.

Die Beweise sind, außer für h, einfach.

6. Das wesentliche Problem besteht darin, wie sich die Konstruktionen 3A und 3B sinnvoll auf äußere Punkte und äußere Geraden von  $O$  verallgemeinern lassen.

A. Es sei  $P$  ein äußerer Punkt. Zunächst betrachten wir die äußeren (also  $O$  treffenden) Geraden durch  $P$ , legen in den Schnittpunkten einer solchen Geraden mit  $O$  die Tangenten an  $O$  und bestimmen deren Schnittpunkt. Hierdurch erhalten wir einen Bogen  $l'(P)$ , dessen Endpunkte die Berührungsrandpunkte der Tangenten von  $P$  an  $O$  sind. Ist nun  $x$  eine innere Gerade durch  $P$ , so bestimme man den gemeinsamen Punkt  $X$  von  $x$  mit  $l'(P)$ . Daß ein und nur ein solcher Punkt existiert, ist unschwer einzusehen. Zu  $x$  gehört nach 3B ein Büschel  $L(x)$ . Dieses besitzt nach Konstruktion genau einen Strahl  $y$ , der durch  $P$  geht. Dessen Berührungsrand  $Y$  mit der Hüll-

<sup>1)</sup> Ich danke an dieser Stelle meinen beiden Zeichnern, Herrn P. BORNHAUSER und Herrn E. GRIMM, für die schöne Arbeit, die viele Versuche erforderte. Da es sich um allgemeine Ovale handelt, ist eine strenge Tangentenkonstruktion nicht möglich. Aus diesem Grunde bedingen sich zeichnerisch das Oval und die Kurven  $l(P)$  bzw. Büschel  $L(p)$  gegenseitig. Eine geringe Änderung von  $O$  – praktisch also schon die verschiedene Auffassung der mit einer Strichstärke behafteten gezeichneten Eilinie – kann starke Veränderungen von  $l(P)$  bzw.  $L(p)$  zur Folge haben. Dies macht die ganz elementaren Konstruktionen (insbesondere der Büschel  $L$ ) zu einer interessanten zeichnerischen Betätigung.

<sup>2)</sup> Begriff «Ordnung» hier allgemein (nicht algebraisch) gefaßt: maximale Zahl der (reellen) Punkte, die  $l$  mit einer Geraden gemeinsam hat.

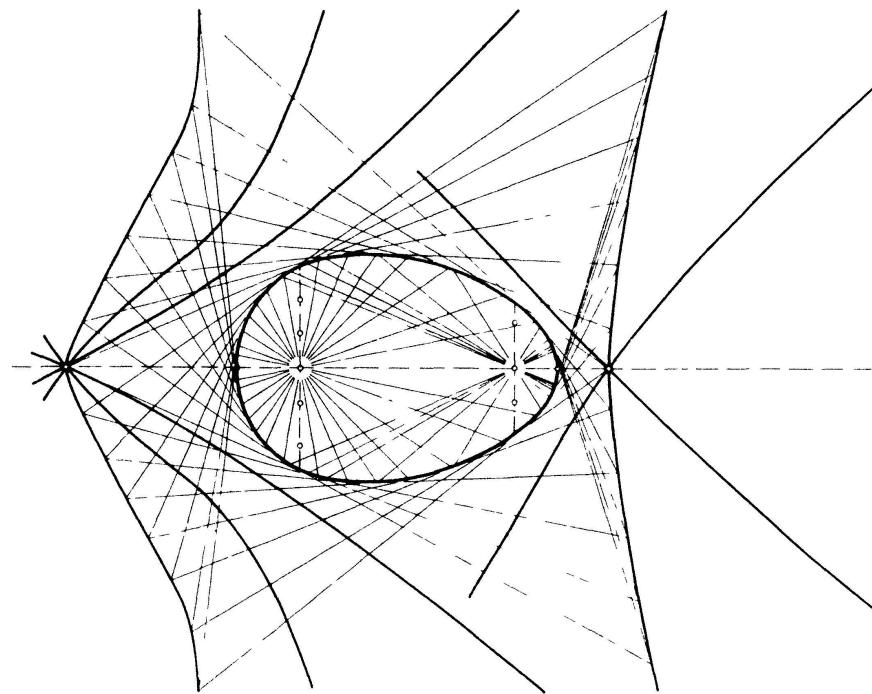


Fig. 2

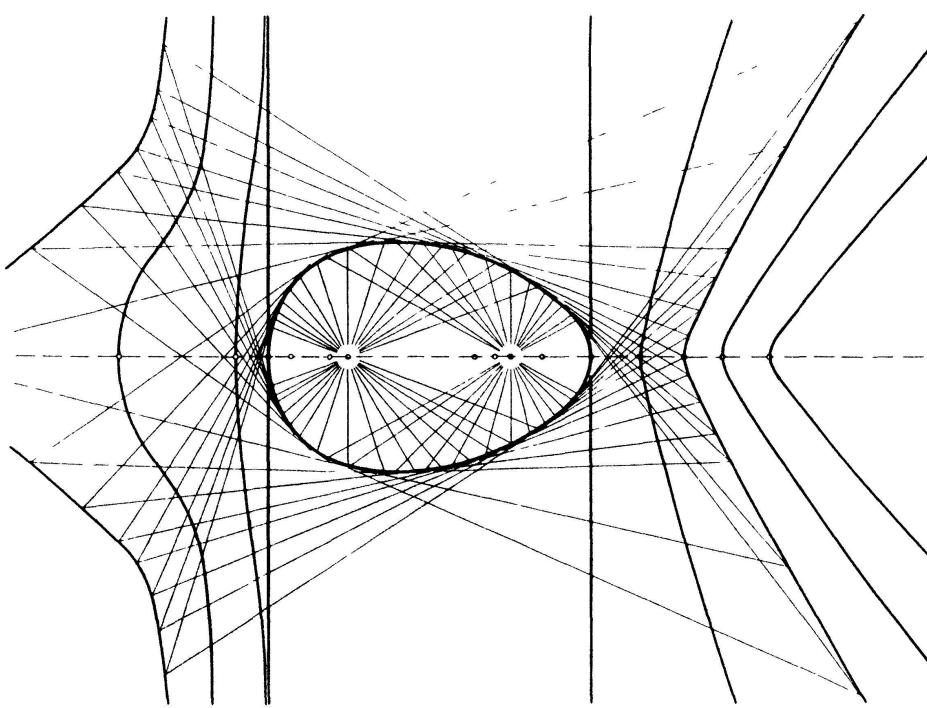


Fig. 1

kurve  $L(x)$  ordnen wir dem inneren Strahl  $x$  von  $P$  zu. Hierdurch erhalten wir einen Bogen  $l''(P)$ , der den Bogen  $l'(P)$  zu einer geschlossenen Kurve  $l(P)$  ergänzt. Figur 6 zeigt  $l(P)$  für vier äußere Punkte.

B. Die duale Konstruktion für eine äußere Gerade  $\phi$  verläuft folgendermaßen: Zunächst betrachten wir die äußeren Punkte auf  $\phi$ , ziehen von jedem die Tangenten an  $O$ , bestimmen die beiden Berührungs punkte und ziehen deren Verbindungsgerade. Hierdurch erhalten wir ein nichtgeschlossenes Büschel  $L'(\phi)$ , dessen Endstrahlen die Tangenten in den Schnittpunkten von  $\phi$  mit  $O$  sind. Ist  $X$  nun ein innerer Punkt auf  $\phi$ , so bestimme man den gemeinsamen Strahl  $x$  von  $X$  mit  $L'(\phi)$ . Zu  $X$  gehört nach 3A eine Kurve  $l(X)$ . Diese besitzt nach Konstruktion genau einen Punkt  $Y$ , der auf  $\phi$  liegt. Dessen Tangente  $y$  an  $l(X)$  ordnen wir dem inneren Punkt  $X$  von  $\phi$  zu. Hierdurch erhalten wir ein offenes Büschel  $L''(\phi)$ , welches das offene Büschel  $L'(\phi)$  zu einem geschlossenen Büschel  $L(\phi)$  ergänzt. Figur 7 zeigt die Hüllkurve von  $L(\phi)$  für zwei äußere Geraden, Figur 8 und Figur 3 für je eine äußere Gerade.

Es stellt sich die Frage, ob die Bogen  $l'(P)$  und  $l''(P)$  [bzw. die Büschel  $L'(\phi)$  und  $L''(\phi)$ ] sich bezüglich ihrer Tangenten (bzw. bezüglich ihrer Grenzpunkte) stetig zusammenschließen. Daß dies der Fall ist, läßt sich unschwer einsehen für Ovale, die in jedem ihrer Elemente einen Schmiegkegelschnitt besitzen – eine übrigens für die hier in Betracht kommenden Zusammenhänge fast selbstverständliche Voraussetzung.

$B$  sei einer der beiden Punkte, die  $l(P)$  mit  $O$  gemeinsam hat, sofern  $P$  ein äußerer Punkt ist.  $BP = b$  ist die Tangente in  $B$  an  $O$ . Wir nehmen in der Umgebung von  $B$  einen Punkt  $X$  von  $l'(P)$  an;  $u, v$  seien die Tangenten von  $X$  an  $O$ , deren Berührungs punkte  $U, V$  nach Konstruktion mit  $P$  in einer Geraden liegen. Jetzt betrachte man den durch  $B, U, V, u, v$  bestimmten Kegelschnitt. Rückt  $X$  auf  $l'(P)$  gegen  $B$ , dreht sich somit  $y$  um  $P$  gegen  $b$ , so nähert sich der Kegelschnitt  $(B, U, V, u, v)$  unbegrenzt dem zu  $B$  gehörenden Schmiegkegelschnitt  $s(B)$ , und  $XB$  wird zur Polaren von  $P$  bezüglich  $s(B)$ . Diese Gerade stellt also die Tangente von  $l'(P)$  im Endpunkt  $B$  dar. Ähnlich ergibt sich, daß diese Gerade auch Tangente im Endpunkt  $B$  des Bogens  $l''(P)$  ist.

7. Durch die erläuterten Konstruktionen ist jedem Punkte  $P$  der Ebene eine Kurve  $l(P)$ , jeder Geraden  $\phi$  der Ebene ein Büschel  $L(\phi)$  eindeutig und stetig zugeordnet.

Die Tangenten von  $l(P)$  nenne ich die *Polaren von  $P$  bezüglich des Ovals  $O$* , die Punkte der Hüllkurve von  $L(\phi)$  die *Pole von  $\phi$  bezüglich  $O$* . *Hauptsatz*:

*Die Polaren eines Punktes  $P$  umhüllen die Kurve  $l(P)$ , und  $P$  ist gemeinsamer Pol aller dieser Geraden; die Pole einer Geraden  $\phi$  werden von  $L(\phi)$  umhüllt, und  $\phi$  ist gemeinsame Polare aller dieser Punkte.*

Im Hinblick auf den Umstand, daß das Oval  $O$  nicht algebraisch zu sein braucht, ist es verständlich, daß ein Punkt unbegrenzt viele Polaren besitzt. Überraschend bleibt, daß sich trotz der Allgemeinheit der Grundkurve eine Polarentheorie entwickeln läßt.

Es liegt nahe, wie sich unsere Begriffe auf Eiflächen übertragen lassen. Ferner ergeben sich allgemeine Sätze und Anwendungen der Polarentheorie in der Geometrie der Eilinien.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

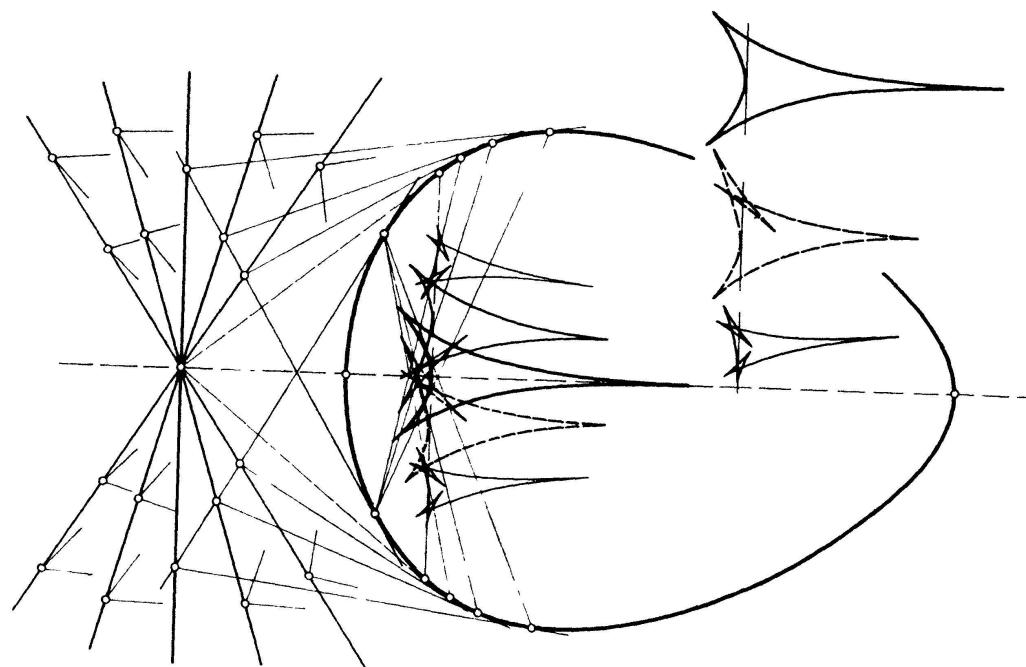


Fig. 4

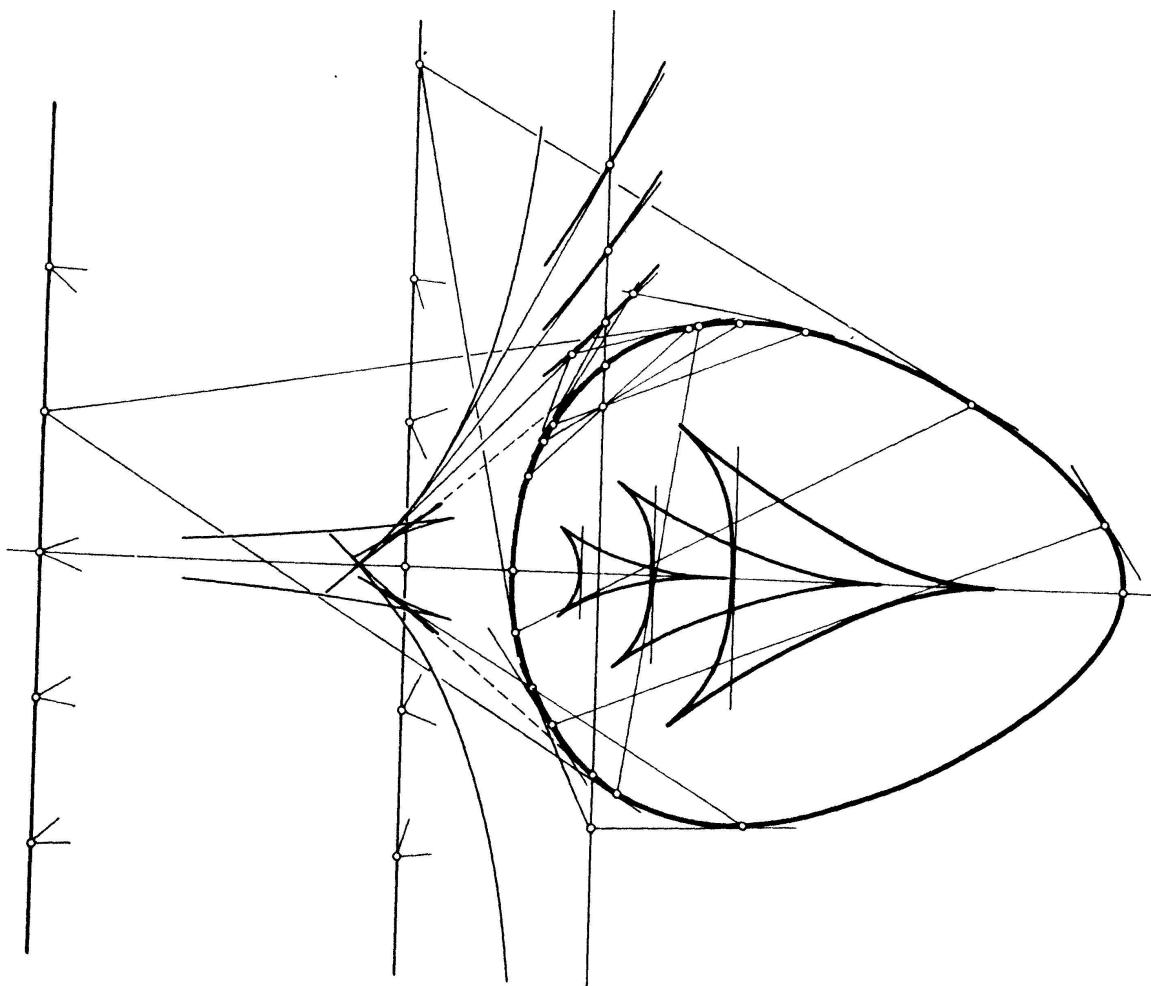


Fig. 3

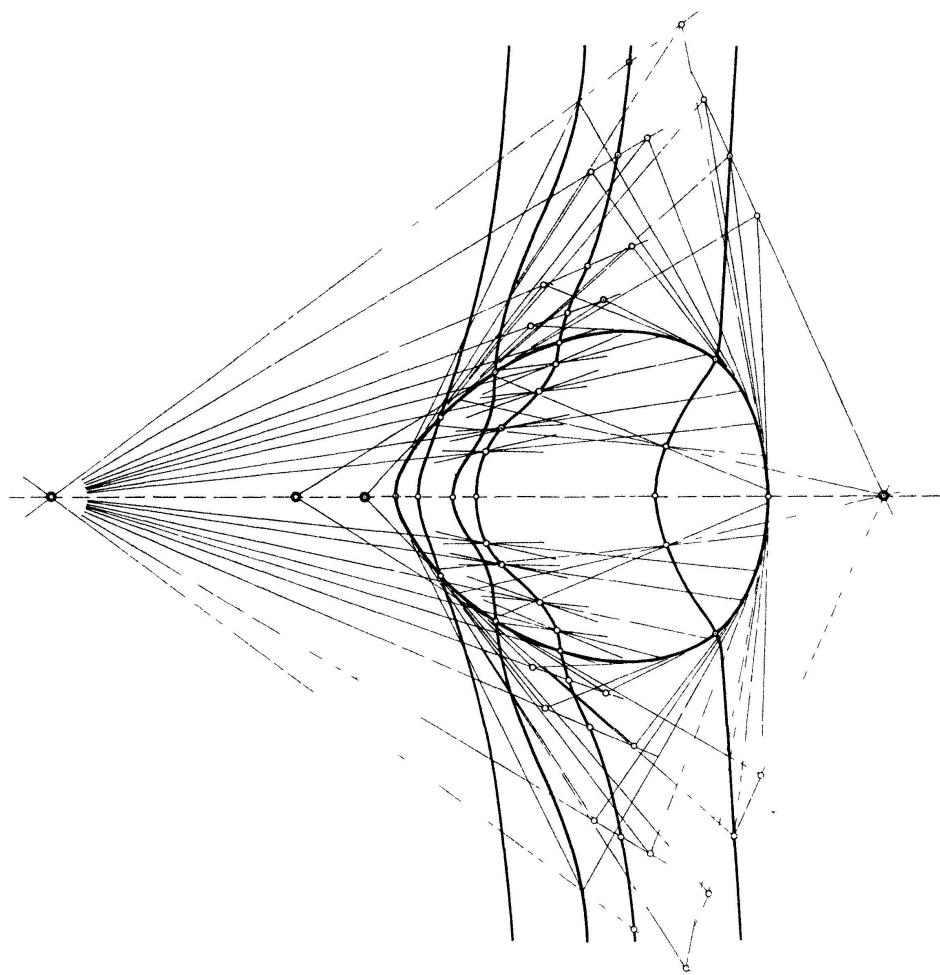


Fig. 6

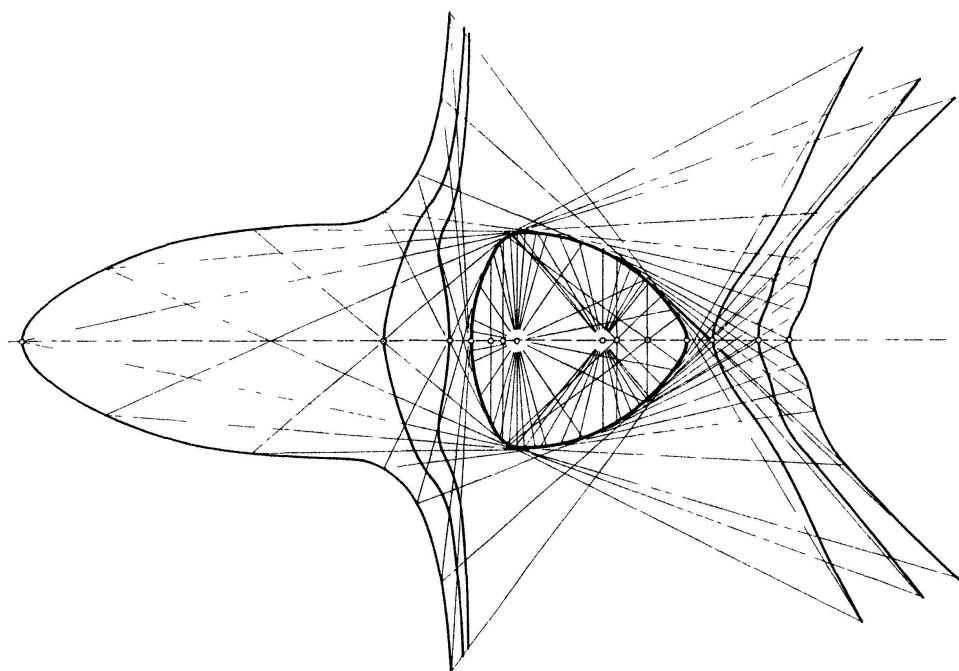


Fig. 5

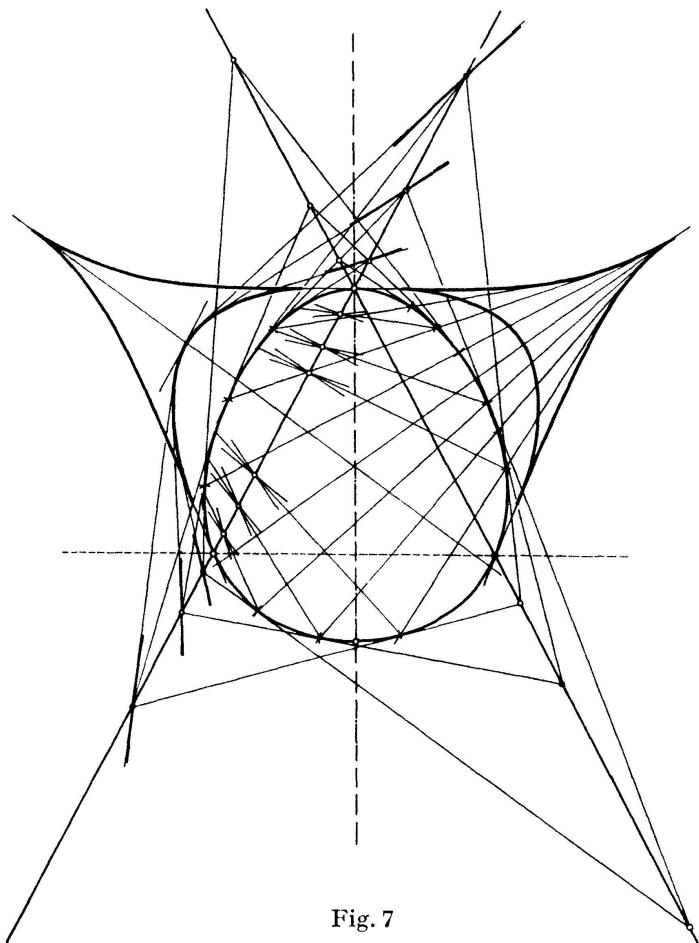


Fig. 7

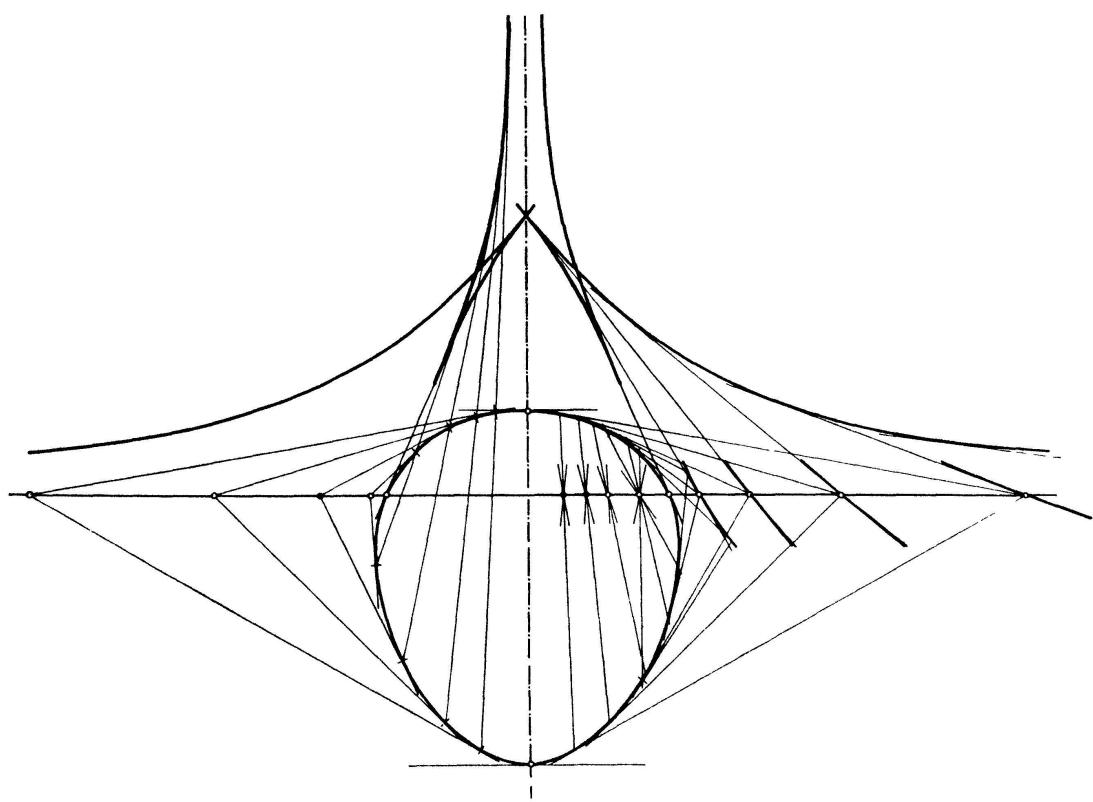


Fig. 8