Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 6

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

S. PICCARD (Neuchâtel): 1° Les groupes que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles d'ordre huit et les bases du groupe symétrique dont l'une des substitutions est un cycle d'ordre huit. – 2° Systèmes connexes et primitifs de cycles d'ordre neuf. – 3° Les classes de substitutions des groupes imprimitifs et les bases de ces groupes.

J. DE SIEBENTHAL (Pully): Sur les sous-groupes de rang un des groupes de LIE compacts.

L. LOCHER-ERNST (Winterthur): Stetige Vermittlung der Korrelationen.

H. HADWIGER (Bern): Zur Inhaltstheorie k-dimensionaler Polyeder.

R. C. YOUNG (London): La mode en mathématique.

Aufgaben

Aufgabe 75. Des relations

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \tag{1}$$

et

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \tag{2}$$

déduire les relations

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \tag{3}$$

et

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0. \tag{4}$$

Peut-on déduire réciproquement (2) de (1) et (3) ? Plus généralement, trouver toutes les relations entre α, β et γ permettant de satisfaire à (1) et (3). F. FIALA (Neuchâtel).

Solution: (A) Les deux relations données équivalent à la suivante:

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0, \tag{5}$$

laquelle, en termes vectoriels, indique que le polygone des trois vecteurs unité d'inclinaisons α, β, γ est fermé: c'est donc un triangle équilatéral, et l'on a par suite essentiellement

$$(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left(\alpha, \alpha + \frac{2}{3}\pi, \alpha - \frac{2}{3}\pi\right). \tag{6}$$

Donc

$$(2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \equiv \left(2\alpha, 2\alpha - \frac{2}{3}\pi, 2\alpha + \frac{2}{3}\pi\right); \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

les trois vecteurs unité d'inclinaisons 2α, 2β, 2γ forment, eux aussi, un triangle équilatéral, et l'on a

$$e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = 0, \tag{7}$$

ce qui équivaut aux deux relations demandées (3) et (4).

(B) «Peut-on déduire réciproquement (2) de (1) et (3) ?»

Evidemment pas, puisque le système

$$\alpha \equiv -\gamma \pmod{2\pi}, \qquad \beta \equiv 0 \pmod{\pi} \tag{8}$$

satisfait à (1) et à (3), sans vérifier (2), en général.

(C) Un simple raisonnement va montrer que le système (8), avec ses permutations cycliques, et le système (6), sont les seuls qui vérifient à la fois (1) et (3).

Les relations (1) et (3) équivalent respectivement aux deux conditions

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = \lambda \text{ réel}, \quad (9) \qquad e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} = \mu \text{ réel}. \quad (10)$$

En termes vectoriels, le polygone des vecteurs unité d'inclinaisons α, β, γ, d'une part,

et celui des vecteurs unité d'inclinaisons 2α, 2β, 2γ, d'autre part, ont chacun comme fermeture un vecteur d'inclinaison 0 ou π.

Transformons un peu ces données. Elevons au carré l'équation (9) et soustrayons-en l'équation (10): il vient

$$e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\beta+\gamma)} + e^{i(\gamma+\alpha)} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu) = \nu \text{ réel}. \tag{11}$$

Utilisons ensuite l'identité $e^{2iu} + e^{2iv} = 2\, e^{i(u+v)} \cos(u-v)$, pour tirer de l'équation (10) la relation

$$e^{i(\alpha+\beta)} \cos(\alpha-\beta) + e^{i(\beta+\gamma)} \cos(\beta-\gamma) + e^{i(\gamma+\alpha)} \cos(\gamma-\alpha) = \mu,$$

que l'on soustrait de (11) pour obtenir

$$a\, e^{i(\alpha+\beta)} + b\, e^{i(\beta+\gamma)} + c\, e^{i(\gamma+\alpha)} = \nu - \mu, \tag{12}$$

à coefficients non-négatifs $a = 1 - \cos(\alpha-\beta)$, $b = 1 - \cos(\beta-\gamma)$, $c = 1 - \cos(\gamma-\alpha)$.

On commence par écarter le cas ou deux des angles α, β, γ seraient égaux, par exemple $\alpha = \beta$, c'est-à-dire $a = 0$, $b = c$. La relation (12) s'écrit $2\, b\, e^{i(\alpha+\beta)} = \nu - \mu$, d'où $\alpha + \gamma \equiv 0 \pmod{\pi}$, et (11) se réduit à $e^{2i\alpha} = \nu \pm 2$, d'où $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\pi}$, un cas particulier de (8).

On écarte ensuite le cas ou deux des angles α, β, γ seraient soit opposés, soit supplémentaires, c'est-à-dire, par exemple, $\alpha \equiv -\gamma \pmod{2\pi}$; on se retrouve ici encore au cas (8). $\alpha + \gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$ appartient au cas (6).

Désormais la relation (11) représente la composition de trois vecteurs unité d'inclinaisons *distinctes non nulles* (mod π), et (12) celle de trois vecteurs non nuls $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, parallèles aux premiers et de mêmes sens, les deux résultantes demeurant, elles aussi, parallèles. Les deux polygones de vecteurs sont donc semblables, et la proportionnalité des côtés exige

$$|\alpha-\beta| \equiv |\beta-\gamma| \equiv |\gamma-\alpha|. \pmod{2\pi}$$

De trois signes, deux doivent être les mêmes, on a donc essentiellement

$$\alpha-\beta \equiv \beta-\gamma \equiv \frac{1}{2}(\alpha-\gamma) \equiv \pm(\gamma-\alpha). \pmod{2\pi}$$

Le signe $-$ est exclu par l'hypothèse $\alpha \not\equiv \gamma$. Le signe $+$ donne

$$\alpha-\beta \equiv \beta-\gamma \equiv \gamma-\alpha \equiv \frac{2}{3}\pi; \pmod{2\pi}$$

c'est le cas (6). Mlle R. C. H. YOUNG (London).

Weitere Lösungen sandten: C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), A. STOLL (Zürich).

Aufgabe 77. Die Zahl des Geburtsjahres eines berühmten schweizerischen Mathematikers hat folgende Eigenschaften: Die Quersumme der Zahl, die Summe und Differenz der dritten und vierten Ziffer und die letzte Ziffer selbst sind alles von Null verschiedene Quadratzahlen. Ebenso bilden die ersten zwei Ziffern als Zahl im Zehnersystem gelesen eine Quadratzahl. L. LEHMANN (Bern).

Lösung: Es sei $1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$ die zu bestimmende Zahl. Da sie ein schon vergangenes Datum darstellen soll, kann a nur 1 sein, also muß $b = 6$ sein, da $10\,a + b$ eine Quadratzahl ist. Da $c + d$, $c - d$, d von Null verschiedene Quadratzahlen sind, kann d nur die Werte 1, 4, 9 annehmen, denen wegen der Bedingung, daß $c + d$ ein Quadrat ist, nur folgende Werte von c entsprechen: 0, 3, 8; 0, 5; 0, 7. Weil auch $c - d$ ein Quadrat ist, folgt $c = 5$, $d = 4$. Die gesuchte Zahl ist also 1654, das Geburtsjahr von JACOB BERNOULLI. Die erste der fünf Bedingungen, daß die Quersumme $a + b + c + d$ eine Quadratzahl ist, wurde nicht benutzt und ist also überflüssig.

Muß die Zahl nicht ein Datum sein, so können wir leicht alle Zahlen angeben, die den fünf Bedingungen genügen. Da $c = 5$ und $d = 4$ ist, müssen wir nur noch $10\,a + b$ und $a + b + 9$ zu Quadratzahlen machen. Es sind nur die Fälle $a = 0$, $b = 0$; $a = 1$, $b = 6$; $a = 2$, $b = 5$ möglich, die die Zahlen 54, 1654, 2554 ergeben. S. CIAMPA (Pisa).

Weitere Lösungen sandten: J. BINZ (Biel), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), K. RIEDER (Riehen), T. REICH (Glarus), E. ROTH-DESMEULES (Luzern), E. ROTHMUND (Zürich), H. R. SPEICH (Zürich).

Aufgabe 78. Ein Pyramidenstumpf hat die Grundfläche G, die Höhe h und das Volumen $V = k\,h\,G\,(1/3 \leqq k \leqq 1)$. Welchen Wert hat das Ähnlichkeitsverhältnis von Grund- und Deckfläche? E. TROST (Zürich).

Lösung: Das Ähnlichkeitsverhältnis von Grund- und Deckfläche ist $\lambda = \sqrt{g}/\sqrt{G}$. Aus $V = h\,(G + \sqrt{G\,g} + g)/3 = k\,h\,G$ ergibt sich die Gleichung $\lambda^2 + \lambda - (3\,k - 1) = 0$ mit $\lambda = (\sqrt{12\,k - 3} - 1)/2$. Die Grenzfälle $k = 1$, $\lambda = 1$ bzw. $k = 1/3$, $\lambda = 0$ entsprechen dem Prisma bzw. der Pyramide. E. ROTH-DESMEULES (Luzern).

Lösungen gingen ferner ein von H. BIERI (Bern), H. FAEHNDRICH (Bern), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), T. REICH (Glarus), A. SCHWARZ (Seuzach), H. R. SPEICH (Zürich).

Aufgabe 79. Zwei Ebenen senkrecht zur Diagonale eines Würfels teilen dessen Volumen in drei gleiche Teile. Man zeige, daß diese Ebenen die Diagonale nahezu (jedoch nicht genau) im Verhältnis 17:6:17 teilen. G. POLYÀ (Stanford, USA.).

1. Lösung: Der Mittelschnitt des Würfels mit der Seite 1 normal zur Diagonale $D = \sqrt{3}$ ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $0{,}5\,d$, $d = \sqrt{2}$, also $M = 0{,}75\sqrt{3}$. Ein Parallelschnitt im Abstand x ist ein gleichwinkliges Sechseck mit der Seitenfolge *ababab*, wo $a + b = d$ und $a : b = (D/6 + x) : (D/6 - x)$. Die Fläche dieses Schnittes ist

$$G = 0{,}25\,[(a + 2\,b)^2 - 3\,b^2]\sqrt{3} = 0{,}75\,(1 - 4\,x^2)\sqrt{3}.$$

Wegen der Drittelung des Würfelvolumens ergibt sich mit der Simpsonschen Formel

$$\frac{1}{3} = \frac{2\,x\,(2\,G + 4\,M)}{6} \quad \text{oder} \quad 12\,x^3\sqrt{3} - 9\,x\sqrt{3} + 2 = 0.$$

Setzt man $x = 0{,}5\,y\sqrt{3}$, so folgt die Gleichung

$$27\,y^3 - 27\,y + 4 = 0.$$

Der Näherungswert $y = 0{,}15$ gibt die Newtonsche Verbesserung von 0,0016 und die Teilung 17:6:17. R. LAUFFER (Graz).

Dieselbe Lösung sandte Herr K. RIEDER (Riehen). Er gibt den genaueren Wurzelwert $y = 0{,}1516347$ an. Durch Entwicklung in einen Kettenbruch findet er als vierten Näherungsbruch den besseren Näherungswert 5/33. Hieraus ergibt sich als einfaches Verhältnis der Diagonalabschnitte mit *besserer* Annäherung 14:5:14.

2. Lösung: Verlängert man drei von derselben Würfelecke ausgehende Kanten (Länge 1) um x und schneidet den Würfel durch die die drei Endpunkte verbindende Ebene, so findet man sofort für das Volumen des äußeren Würfeldrittels $\{(1 + x)^3 - 3\,x^3\}/6 = 1/3$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$2\,x^3 - 3\,x^2 - 3\,x + 1 = 0. \tag{1}$$

Für das gesuchte Verhältnis, $y =$ Mittelstück : Endstück, gilt dann:

$$y = \frac{1 - 2\,x}{1 + x}. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) für x ist für die numerische Rechnung bequemer als die aus (1) und (2) resultierende Gleichung für y. Man verifiziert leicht $x_1 = 1/4$ als Näherungslösung von (1). Ferner folgt aus (1):

$$x = \frac{2\,x^3 - 3\,x^2 + 1}{3} = \varphi(x)\,.$$

Das gibt, beginnend mit x_1, ein gut konvergierendes Iterationsverfahren:

$$x_2 = \varphi\left(\frac{1}{4}\right) \approx \frac{11}{40}\,, \qquad x_3 = \varphi\left(\frac{11}{40}\right) \approx \frac{109}{400}\,, \qquad \text{usw.}$$

Somit:

$$y_1 = \frac{2}{5}\,, \qquad y_2 = \frac{18}{51} = \underline{\frac{6}{17}}\,, \qquad y_3 = \frac{182}{509}\,.$$

A. Stoll (Zürich).

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), L. Kieffer (Luxemburg), G. Neuweiler (Olten), T. Reich (Glarus).

Aufgabe 81. On considère un prisme triangulaire dont la section droite est équilatérale. Montrer qu'une section plane quelconque forme avec les faces trois angles dièdres δ_1, δ_2, δ_3 qui satisfont à la relation $\cos\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\delta_3 = 0$.

L. Descloux (Fribourg).

1. Lösung: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien Einheitsnormalvektoren der Seitenflächen des Prismas, $\vec{n}$ Einheitsnormalvektor der Schnittebene. Da $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, ergibt sich durch skalare Multiplikation mit $\vec{n}$: $\vec{n}\,\vec{a} + \vec{n}\,\vec{b} + \vec{n}\,\vec{c} = 0$, d.h. $\cos\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\delta_3 = 0$. Dieser Beweis überträgt sich auf jedes reguläre n-Eck als Normalschnitt.

A. Bager (Hjørring, Dänemark).

2. Lösung: La question posée peut être généralisée: Si un prisme a pour section droite un polygone régulier ou, plus généralement, un polygone dont tous les angles sont égaux, une section plane quelconque forme avec les faces des angles dièdres δ_1, δ_2, ... dont la somme des cosinus est nulle.

Soit $ABC\ldots$ un polygone de n côtés dont tous les angles sont égaux, section droite d'un prisme coupé par un plan quelconque γ. Soit p la perpendiculaire abaissée d'un point O dans l'intérieur du polygone sur γ. Les angles δ_i formés par γ avec les faces du prisme sont également ceux formés par p avec les perpendiculaires abaissées de O sur AB, BC, ... On est donc ramené à l'énoncé suivant: Etant données dans un plan φ n demi-droites orientées, issues d'un même point O et formant entre elles des angles égaux, toute demi-droite issue de O forme avec ces n demi-droites des angles δ_i dont la somme des cosinus est nulle. Si n est pair, le résultat est immédiat, car les angles formés par p avec deux demi-droites opposées sont supplémentaires. Si n est impair, reportons sur p une distance $OP = 1$ et projetons P orthogonalement en P_1 sur le plan φ. Soit α l'angle formé par OP_1 avec un des rayons voisins et $\beta = 2\,\pi/n$ l'angle de deux rayons consécutifs. On a

$$\begin{aligned}
&\cos\delta_1 + \cos\delta_2 + \cdots \\
&= OP_1\,[\cos\alpha + \cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha) + \cos(2\,\beta - \alpha) + \cos(2\,\beta + \alpha) + \cdots] \\
&= OP_1\,(\cos\alpha + 2\cos\beta\cos\alpha + 2\cos 2\,\beta\cos\alpha + \cdots) \\
&= OP_1\cos\alpha\left(1 + 2\cos\beta + 2\cos 2\,\beta + \cdots + 2\cos\frac{n\,\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

La quantité entre parenthèses est la somme des parties réelles des racines de l'équation $z^n - 1 = 0$, donc nulle.

C. Vuille (La Chaux-de-Fonds).

Weitere Lösungen sandten F. Goldner (London), L. Kieffer (Luxemburg), R. Lauffer (Graz), G. Neuweiler (Olten).

Neue Aufgaben

106. Gegeben sind ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt A in der Ebene des Strahlenbüschels. Man durchlaufe von A aus eine völlig stetige, in A endende Kurve, die mit jedem Strahl des Büschels genau einen Punkt gemeinsam hat. Wenn die Kurve keine Gerade ist, besitzt sie entweder mindestens drei Wendepunkte oder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze. (Eine Kurve heißt «völlig stetig», wenn sie sowohl bezüglich ihrer Punkte als auch ihrer als existierend vorausgesetzten Tangenten stetig ist. Sie braucht hingegen nicht algebraisch, auch nicht einmal analytisch zu sein.)
L. LOCHER-ERNST (Winterthur).

107. Ein völlig stetiger Bogen (siehe Aufgabe 106) ohne Singularitäten (Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten, Ecken, Strecken) werde unter Vermeidung jeder Singularität über seine beiden Enden hinaus unbegrenzt fortgesetzt; dann existieren eine konvexe Hülle und ein konvexer Kern, denen sich der Bogen anschmiegt. Hierbei kann der Kern wie auch die Hülle ein konvexes Vieleck sein; ersterer kann insbesondere in einen Punkt, letztere in eine Gerade ausarten.
L. LOCHER-ERNST (Winterthur).

108. Wie Aufgabe 106, mit dem Unterschied, daß mehrfache Punkte, aber keine anderen Singularitäten, zugelassen werden. Der unbegrenzt fortzusetzende Bogen besitzt dann nur Doppelpunkte und notwendig zwei konvexe Hüllen, die keine gemeinsame Tangente und höchstens vier gemeinsame Punkte besitzen.
L. LOCHER-ERNST (Winterthur).

109. Es sei C ein Kreis auf der Kugel K. Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen derjenigen Kegel mit der Leitlinie C, deren zweite Schnittkurven mit K Kreise mit festem Radius sind. VICENTE INGLADA (Madrid).

110. Es sei C eine gegebene Kurve außerhalb einer Ellipse E. Von den Punkten P von C werden die Tangenten an E gezogen. Für welche Punkte P hat das von der Berührungssehne abgeschnittene Ellipsensegment maximale oder minimale Fläche?
VICENTE INGLADA (Madrid).

111. Bei einem Dreieck mit den Seiten a, b, c ist die Potenz des Schwerpunktes in bezug auf den Umkreis gegeben durch $-(a^2+b^2+c^2)/9$. Man formuliere und beweise den entsprechenden Satz für n Punkte auf einer Kugelfläche beliebiger Dimensionszahl (in einem euklidischen Raum). A. STOLL (Zürich).

112. Ein Dreieck, bei dem der Abstand des Schwerpunktes vom Umkreismittelpunkt einem Drittel des Umkreisradius gleichkommt, ist rechtwinklig. Das Umgekehrte ist evident. A. STOLL (Zürich).

113. Kann die Summe der ersten n Kubikzahlen für $n > 1$ wieder eine Kubikzahl sein? (Vgl. Aufgabe 71.) E. TROST (Zürich).

Literaturüberschau

G. RICCI: *Figure, reticoli e computo di nodi*

Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano *19*, 165–205 (1948)

Der aus einem Vortrag entstandene Aufsatz berichtet über die Entwicklung eines klassischen Problems aus der geometrischen Zahlentheorie. Es handelt sich um die Abschätzung der Anzahl $A(x)$ der Gitterpunkte eines quadratischen Gitters, die innerhalb oder auf dem Rand einer Kreisscheibe (vom Radius $\sqrt{x}$) oder eines allgemeineren, vom Parameter x abhängenden Eibereiches C_x von der Fläche $F(x)$ liegen. Die Aussagen sind von folgendem Typus: $A(x) = F(x) + O(x^\nu)$, wo $O(x^\nu)$ eine Funktion von der Größenordnung x^ν bedeutet, d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} O(x^\nu)/x^\nu$ ist endlich.

Für den Kreis ist schon von GAUSS $\nu = 1/2$ gefunden worden. Die Abschätzung wird um so besser, je kleiner ν gewählt werden kann. Unter gewissen Beschränkungen für die Krümmung von C_x gilt nach VAN DER CORPUT $\nu = 1/3$. Besonderes Interesse be-