

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nous donnons ci-dessous un résumé des résultats d'ensemble:

$$4p^3 + 27q^2 < 0, \text{ d'où } p < 0, \text{ 3 racines} \begin{cases} \text{racine intermédiaire calculable par A. S.} \\ \text{racines extrêmes calculables par A. S. (}x^2\text{)} \end{cases}$$

$$4p^3 + 27q^2 > 0 \begin{cases} \text{si } p < 0 \text{ racine unique calculable par A. S. (}x^2\text{)} \\ \text{si } p > 0 \text{ racine unique calculable par A. S. M.} \end{cases}$$

Ce tableau peut encore être simplifié. Il est superflu de former l'expression $4p^3 + 27q^2$. Il suffit de considérer le signe de p et de q . Voici une marche qui nous paraît donner des garanties suffisantes tout en réduisant au minimum les calculs accessoires.

Règle pratique pour la résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$

Placer l'index de la réglette en face de $|q|$. (Cette position est définitive; tous les calculs se font ensuite exclusivement par déplacements du curseur.)

Si $p > 0$, racine unique, de signe contraire à celui de q . On la calcule par A. S. M.

Si $p < 0$, il y a *au moins* une racine de signe contraire à celui de q dont la valeur absolue est supérieure à $\sqrt{-p}$. On la calcule par A. S. (x^2) comme la plus grande en valeur absolue des racines extrêmes d'une équation à trois racines. On tente ensuite, par le même procédé, d'obtenir l'autre racine extrême. Si cette tentative échoue, c'est que l'équation proposée n'a qu'une racine. Si elle aboutit, l'équation a trois racines, et il ne reste plus qu'à calculer la troisième — racine intermédiaire — par A. S. ou A. S. M. (à volonté). On sait que cette racine est du signe de q .

M. BESSON et EDM. BRASEY, Fribourg.

Kleine Mitteilungen

I. Die graphische Ermittlung der reellen Wurzeln kubischer Gleichungen

Die Bestimmung der Schnittpunkte des Kreises

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2$$

mit der Parabel

$$y = -x^2$$

führt auf die Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + (2q + 1)x^2 - 2px = x[x^3 + (2q + 1)x - 2p] = 0.$$

Von den vier Wurzeln dieser Gleichung ist $x_1 = 0$, während die drei weiteren der kubischen Gleichung

$$x^3 + (2q + 1)x - 2p = 0$$

angehören. Da komplexe Wurzeln in einer Gleichung nur paarweise auftreten können, muß diese Gleichung dritten Grades noch eine oder drei reelle Wurzeln haben. Der Kreis geht wegen $x_1 = 0$ durch den Scheitel der Parabel und schneidet diese außerdem

noch einmal oder dreimal. Schreiben wir die reduzierte kubische Gleichung in der Form

$$x^3 + ax + b = 0,$$

dann ergeben sich die Koordinaten des Kreismittelpunktes M aus den beiden Gleichungen:

$$a = 2q + 1, \quad b = -2p$$

zu

$$p = -\frac{b}{2}, \quad q = \frac{a-1}{2}.$$

Es ist somit jeder reduzierten kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ ein Punkt $M[-b/2, (a-1)/2]$ der (X, Y) -Ebene zugeordnet als Mittelpunkt eines Kreises, dessen Schnittpunkte mit der Parabel $y = -x^2$ die reellen Wurzeln der Gleichung ergeben. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt der Ebene $M(p, q)$ eine kubische Gleichung von der Form $x^3 + (2q+1)x - 2p = 0$, deren Wurzeln auf dem Kreise $k(p, q, \sqrt{p^2 + q^2})$ liegen.

Die Grenzlage zwischen den beiden Möglichkeiten, daß der Kreis außer im Scheitel einmal oder dreimal schneidet, ist dann gegeben, wenn sich beide Kurven berühren und somit die kubische Gleichung eine reelle Doppelwurzel hat. In die Wurzelfaktoren zerlegt, lautet sie dann:

$$(x - \alpha)^2 (x - \beta) = 0.$$

Ausgerechnet und geordnet:

$$x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta = 0.$$

Die Koeffizientenvergleichung ergibt dann:

$$2\alpha + \beta = 0, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta = a, \quad -\alpha^2\beta = b.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\beta = -2\alpha$ und aus den beiden andern nach Einsetzen für β :

$$\frac{a}{3} = -\alpha^2, \quad \frac{b}{2} = \alpha^3,$$

so daß zwischen a und b die Beziehung besteht:

$$\underline{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0}.$$

Unter dieser Bedingung hat also die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei gleich sind (Doppelwurzel)

$$x_1 = x_2, \quad x_3 = -2x_1,$$

und der zugehörige Kreis berührt die Parabel, und zwar von innen. Führt man in obenstehende Bedingungsgleichung die Koordinaten (p, q) des Kreismittelpunktes ein: $a = 2q + 1$, $b = -2p$, dann ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\left(q + \frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}p^2.$$

Mithin lautet die Gleichung des geometrischen Ortes für die Mittelpunkte aller die Parabel berührenden Kreise:

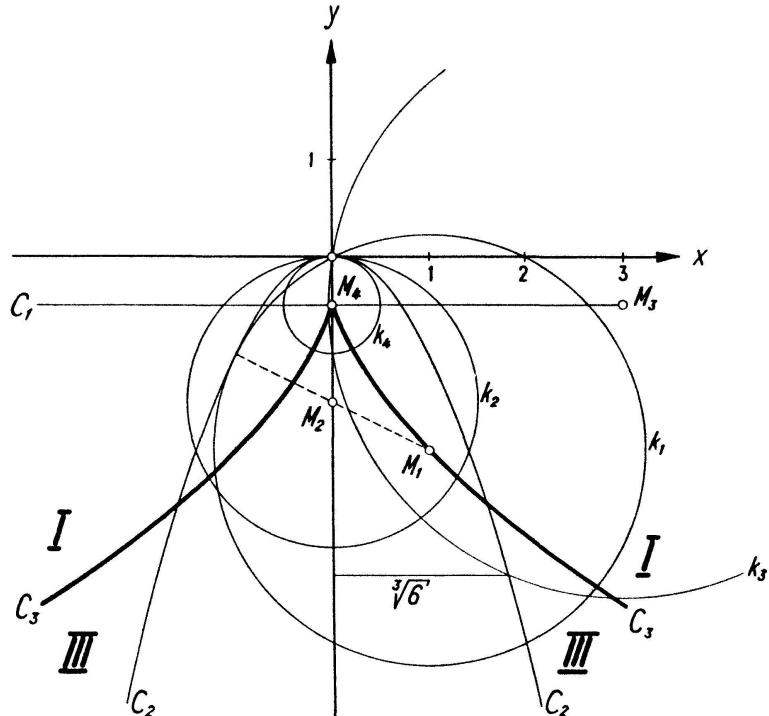
$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}x^2,$$

und der geometrische Ort selbst ist eine *semikubische Parabel* mit der Y -Achse als Symmetrale und der Spitze im Punkte $(0, -1/2)$.

Rückt der Kreismittelpunkt parallel zur X -Achse in das Innere dieser Parabel, dann bleibt der Wert von q ungeändert, während jener von p abnimmt, ebenso bleibt daher der Koeffizient a gleich, wogegen b absolut kleiner wird, so daß in diesem Falle

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0.$$

(Mittelpunkt *innerhalb* der semikubischen Parabel.) Der zugehörige Kreis schneidet dann die gewöhnliche Parabel viermal, und die kubische Gleichung hat daher *drei reelle* Wurzeln.



- C_1 : Gerade $y = -1/2$ enthält die Kreismittelpunkte für alle reinen kubischen Gleichungen (M_3).
- C_2 : Gewöhnliche Parabel $y = -x^3$, Parameter $p = 1/2$.
- C_3 : Semikubische Parabel $(y + 1/2)^3 = -27x^2/8$, ihre Punkte sind die Mittelpunkte jener Kreise, welche die gewöhnliche Parabel von innen berühren (M_1, k_1).
- k_1 : Der Kreis berührt die Parabel im Punkte $(-1, -1)$ und schneidet sie im Punkte $(2, -4)$. Gleichung: $(x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.
- k_2 : Der Kreis schneidet die Parabel in zwei zur Achse symmetrischen Punkten und berührt sie im Scheitel $M_2(0, -3/2)$. Gleichung: $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = +\sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$.
- k_3 : Der Kreis hat den Mittelpunkt auf C_1 mit den Koordinaten $M_3(3, -1/2)$. Die zugehörige Gleichung lautet: $x^3 - 6 = 0$, $x_1 = \sqrt[3]{6}$.
- k_4 : ist der Krümmungskreis für den Scheitel der Parabel. Gleichung: $x^3 = 0$.
- I: Gebiet außerhalb der semikubischen Parabel mit *einer reellen* Wurzel.
- III: Gebiet innerhalb der semikubischen Parabel mit *drei reellen* Wurzeln.

Für einen Kreis, dessen Mittelpunkt außer der semikubischen Parabel liegt, ist aus denselben Gründen

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$$

(Mittelpunkt *außerhalb* der semikubischen Parabel), und der Kreis schneidet die Parabel $y = -x^3$ außer in ihrem Scheitel nur noch einmal, die zugehörige Gleichung hat *nur eine reelle* Wurzel. Damit ist die Bedeutung des Ausdruckes $(a/3)^3 + (b/2)^2$ als *Diskriminante der kubischen Gleichung* vollkommen geklärt und geometrisch veranschaulicht.

Sonderfälle der kubischen Gleichung:

$$1. \ a = 0, \ x^3 + b = 0, \ x = \sqrt[3]{-b} = \sqrt[3]{2p}, \text{ reine kubische Gleichung}$$

Wenn der Koeffizient a des linearen Gliedes verschwindet, wird $q = (a - 1)/2 = -1/2$; bei der *reinen* kubischen Gleichung liegt daher der Kreismittelpunkt auf der Geraden $y = -1/2$, die durch die Spitze der semikubischen Parabel läuft. Man erhält so grafisch die *Kubikwurzel* aus jeder beliebigen Zahl z aus dem Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(z/2, -1/2)$ und der Parabel $y = -x^2$.

$$2. \ b = 0, \ x^3 + ax = x(x^2 + a) = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = +\sqrt{-a}, \ x_3 = -\sqrt{-a}.$$

In diesem Falle liegt der Kreismittelpunkt auf der Y-Achse, und zwar ober- oder unterhalb der Geraden $y = -1/2$, je nachdem $a \gtrless 0$ ist. Der Kreis berührt wegen $x_1 = 0$ (Doppelwurzel) die Parabel im Scheitel und schneidet sie überhaupt nicht oder noch zweimal, wobei die Schnittpunkte symmetrisch zur Parabelachse liegen.

$$3. \ a = b = 0, \ x^3 = 0.$$

Der zugehörige Kreis $k(0, -1/2, 1/2)$ hat den Mittelpunkt in der Spitze der semikubischen Parabel und ist zugleich der *Krümmungskreis* für den Scheitel der gewöhnlichen Parabel; er steht daher mit ihr in engster Berührungs, und $x = 0$ ist eine vierfache Wurzel, von denen drei zur kubischen Gleichung gehören. Rückt der Kreismittelpunkt gegen den Scheitel der Parabel, dann erfolgt die Berührungs von innen, rückt er aber im entgegengesetzten Sinne nach abwärts, dann ist die Brührungs von außen.

K. KRÜSE, Hall im Tirol, Absam.

II. Construction de trapèzes

1° — Construire un trapèze connaissant la longueur l d'une diagonale, les angles φ et ψ formés par les côtés non parallèles et cette diagonale et le point d'intersection E des diagonales.

Données: $\overline{AC} = l$, $\angle DAC = \varphi$, $\angle BCA = \psi$, E = point d'intersection des diagonales (fig. 1).

Supposons le problème résolu, et soit $ABCD$ le trapèze demandé. Prolongeons \overline{AD} et \overline{BC} jusqu'à leur point d'intersection F et abaissons les perpendiculaires \overline{CG} et \overline{BH} sur \overline{DA} ou son prolongement.

Désignons \overline{CD} par x ; \overline{AB} par y ; \overline{AE} par b ; \overline{EC} par a ; \overline{CG} par h et \overline{BH} par k ; x , y et k ne sont pas connus; a , b et h sont connus.

Les triangles semblables CDG et BAH donnent la relation $h:k = x:y$ et les triangles semblables CDE et ABE : $a:b = x:y$, et après avoir éliminé x et y entre ces deux relations, il reste $h:k = a:b$.

Ainsi, après avoir déterminé k , par une quatrième proportionnelle, il sera bien facile de construire le trapèze demandé.

Remarque: Les triangles ACF et BDF sont *équivalents*. Supposons alors le triangle ACF donné; le problème précédent est alors l'équivalent de celui-ci:

Construire un triangle BDF équivalent à un triangle donné ACF , l'angle F étant commun aux deux triangles et connaissant le point d'intersection E des côtés de chaque triangle opposés à l'angle F .

2° — Construire un trapèze connaissant la longueur l d'une diagonale, les angles φ et ψ que fait cette diagonale avec les côtés non parallèles et la direction de la deuxième diagonale.

Données: $\overline{AC} = l$, $\angle DAC = \varphi$, $\angle ACB = \psi$, direction Δ de la deuxième diagonale (fig. 2).

Comme dans le cas précédent, supposons le problème résolu et soit $ABCD$ le trapèze demandé. Prolongeons \overline{AD} et \overline{BC} jusqu'à leur point d'intersection F ; menons CE parallèle à Δ ou à BD et abaissons les perpendiculaires CG et BH sur \overline{AD} . Désignons \overline{CE} par m ; \overline{BD} par M ; \overline{CG} par h ; \overline{BH} par k ; FA par a ; FD par z et FE par n . a, m, n et h sont connus; M, k et z ne sont pas connus.

Les triangles semblables CEF et BDF donnent la relation $m:n = M:z$ et les triangles semblables CEG et BDH : $h:m = k:M$.

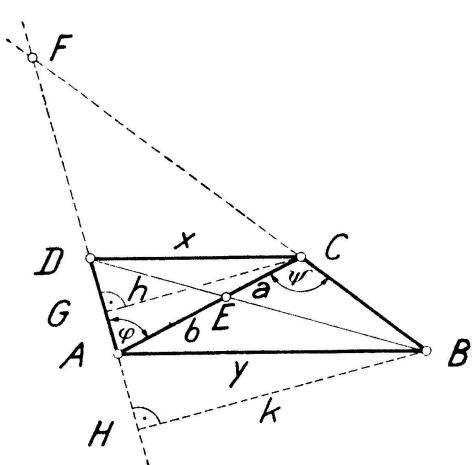


Fig. 1

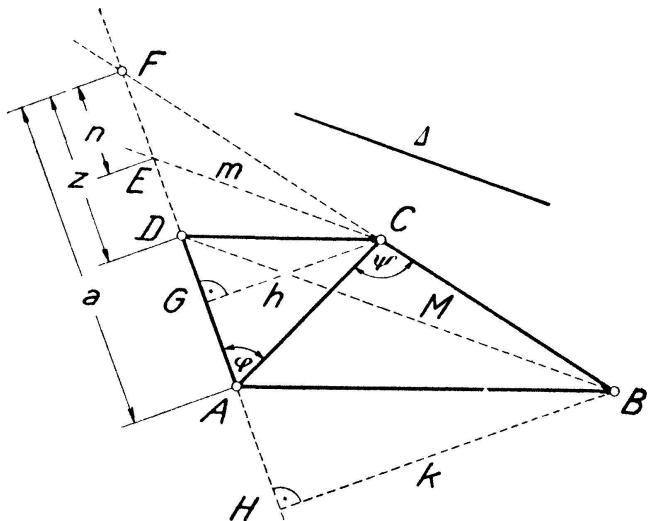


Fig. 2

Enfin, les triangles équivalents ACF et BDF donnent la relation $a \cdot h = z \cdot k$. Après avoir éliminé M et k entre les trois relations précédentes, on trouve

$$z = \sqrt{a \cdot n}.$$

Ainsi, après avoir déterminé z comme une moyenne géométrique entre a et n , il est bien facile de construire le trapèze demandé.

Remarque: Les triangles ACF et BDF sont équivalents. Supposons le triangle ACF donné; le problème précédent est alors l'équivalent de celui-ci:

Construire un triangle BDF équivalent à un triangle donné ACF , l'angle F étant commun aux deux triangles et connaissant la direction du côté opposé à l'angle F ou plus simplement:

Construire un triangle connaissant sa surface et ses angles (problème connu).

3° — Construire un trapèze connaissant la longueur d'une diagonale, les angles que forme cette diagonale avec les côtés non parallèles et un point de l'autre diagonale, mais différent du point d'intersection des diagonales.

Je me borne à signaler ce problème sans en donner la solution, complètement. Une fois le problème mis en équations et après avoir éliminé certaines inconnues, la solution est fournie par une équation du 2^e degré dont il est possible de construire géométriquement les coefficients et par conséquent les racines.

La considération des triangles équivalents qui interviennent dans la résolution de ce problème permet de résoudre le problème suivant qui lui est équivalent:

Construire un triangle connaissant sa surface, un angle et un point du côté opposé à cet angle.

G. BILGER, Genève.

III. Das System der Doppelbuchhaltung

Die Buchhaltungsgrößen verschiedener, nicht einheitlicher Art, wie Aktiven und Passiven, Einnahmen und Ausgaben, Gewinn und Verlust, Sollposten und Habenposten, Kapital, Vermögen usw. haben einen *relativen* Eigenwert. Die überlieferte sprachliche Bedeutung obiger Wörter ist jedoch vorzeichenlos, *absolut*. Alle Buchhaltungsgrößen lassen sich auf die mathematisch betrachtet einheitlichen und gleichartigen Wertgrößen *Aktiven und Passiven* zurückführen, in Aktiven und Passiven zerlegen.

Die in den Konten aufgezeichneten natürlichen, zeichenlosen Zahlen können unterschiedlich interpretiert werden. Für die Rechnung gilt: Der Doppelbuchhaltung liegt eine algebraische Addition laut Rechenvorschrift 1 über relativ aufgefaßte Aktiven und Passiven (A und P bedeuten natürliche Zahlen), d.h. über positive und negative Vermögenswerte zugrunde, welche mit ihrem tatsächlichen Werte verrechnet werden. Die in der Buchhaltungspraxis angewandte und übliche Rechnung ist eine algebraische Addition absoluter Posten laut Rechenvorschrift 2, hat also die Form einer Subtraktion absoluter Habenposten von absoluten Sollposten. Diese absoluten Posten können Aktiven und Passiven, aber auch Absolutwerte andersartiger, von Aktiven und Passiven abgeleiteter, auch unterschiedlicher Buchhaltungsgrößen vom gleichen absoluten Betrag darstellen. Praktisch führt die Doppelbuchhaltung Rechnung über Buchhaltungsgrößen verschiedener Art, welche mit ihrem absoluten Betrage laut Vorschrift 2 in Rechnung gestellt werden, ohne Rücksicht auf deren relativen, d.h. tatsächlichen, allenfalls abweichenden Wert, ein Novum in der angewandten Mathematik.

	+ Soll	Haben -	+ Soll	Haben -	
Rechenvorschrift 1	$+ (+ A)$	$- (+ A)$	$+ S_1 $	$- H_1 $	Rechenvorschrift 2
	$- (- P)$	$+ (- P)$	$+ S_2 $	$- H_2 $	
	

Alle Sollposten haben nach Ausrechnung positiven, alle Habenposten negativen Wert. Allgemein gilt daher: *Die Rechnung der Doppelbuchhaltung ist eine algebraische Addition von Sollposten positiven Wertes und von Habenposten negativen Wertes.* Jeder Sollsaldo ist eine positive, jeder Habensaldo eine negative algebraische Summe. So rechnet auch die automatische Buchhaltungsmaschine.

Das der Doppelbuchhaltung zugrunde liegende, über 600 Jahre alte Rechnungssystem ist damit aufgezeigt¹⁾.

ROBERT H. STEHLI, Zürich.

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

39. Jahresversammlung, Davos 26./27. August 1950

Am 26. August gemeinsame Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft mit der Schweizerischen Gesellschaft für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften und der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft zum Andenken an RENÉ DESCARTES, anlässlich der dreihundertsten Wiederkehr seines Todestages.

S. GAGNEBIN (Neuchâtel): La réforme cartésienne et son fondement géométrique.

J. O. FLECKENSTEIN (Basel): Kartesianische Erkenntnistheorie und mathematische Physik des 17. Jahrhunderts.

27. August:

A. CHALLAND (Berne): D'une extension possible du domaine des mathématiques appliquées.

E. BAREISS (Thayngen): Über einen verallgemeinerten Integralsatz.

¹⁾ Für Beweisführung siehe: R. H. STEHLI, Über die mathematischen Grundlagen der Doppelbuchhaltung (Schultheß & Co. AG., Zürich 1947); Schweiz. Z. kaufm. Bildungswesen, November, Dezember 1948, Januar, September 1949, Januar, Juli 1950.