

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 5 (1950)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Punktes  $C$  mit der Abszisse  $x$  die  $x$ -Achse im Punkte  $x/2$  schneidet, haben wir

$$AB = \frac{x}{2}, \quad BC = \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^4} = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2},$$

also

$$AB + BC = \frac{x}{2} (1 + \sqrt{1 + 4x^2}),$$

während für die Sehne gilt:

$$AC = \sqrt{x^2 + x^4} = x \sqrt{1 + x^2}.$$

Anderseits findet man für den Bogen:

$$AsC = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Man bestätigt durch Differenzieren:

$$AsC = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \lg (2x + \sqrt{1 + 4x^2}).$$

Auf Grund dieser Formeln sind die zwei Parabelbögen mit der Endabszisse 1 oder 2 berechnet worden, mit nachstehendem Ergebnis:

Abszisse des Endpunktes	$AC$	$AB + BC$	Gewogenes Mittel	Genauer Wert	Differenz
1	1,414	1,618	1,482	1,479	0,003
2	4,472	5,123	4,689	4,647	0,042

Auch in diesem Beispiel erhöht sich die Genauigkeit in bemerkenswertem Maße beim Übergang von den beiden erstbetrachteten Näherungswerten zu ihrem gewogenen Mittel, obschon die beim Beweis benützten Voraussetzungen nicht längs des ganzen Kreis- oder Parabelbogens erfüllt sind.

Die hier geschilderte Methode kann angewendet werden, um näherungsweise eine Bogenlänge graphisch oder numerisch zu bestimmen. Im ersten Falle wird die Güte der Ergebnisse wesentlich von der Genauigkeit der Tangentenkonstruktion abhängen. Im zweiten Falle wird sich die Methode empfehlen, wenn von der in Frage kommenden Funktion wohl die Ableitung, nicht aber das Bogenintegral berechenbar ist.

ERNST VÖLLM, Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### I. Eine Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks

Die  $n$ -te Potenz eines  $k$ -gliedrigen Polynoms heißt ausgeschrieben

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum P_{v_1, v_2, \dots, v_k}^{(n)} x_1^{v_1} \cdot x_2^{v_2} \cdots x_k^{v_k}, \quad (1)$$

mit

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k = n.$$

Dabei ist  $P_{v_1, v_2, \dots, v_k}^{(n)}$  die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen von  $n$  Ele-

menten, wobei  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  unter sich gleich sind. Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten lassen sich diese Permutationszahlen auf folgende Gestalt bringen:

$$P_{(\nu_1, \dots, \nu_k)}^{(n)} = \frac{n!}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_k!} = \binom{n}{\nu_1} \binom{n-\nu_1}{\nu_2} \binom{n-\nu_1-\nu_2}{\nu_3} \dots \binom{\nu_k}{\nu_k}. \quad (2)$$

Die Koeffizienten der polynomischen Entwicklung (1) genügen der Beziehung

$$\sum_{i=1}^k P_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i - 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_k)}^{(n)} = P_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)}^{(n+1)} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^k \mu_i = n + 1. \quad (3)$$

Die Verifikation folgt leicht, wenn man für die Permutationszahlen auf die Fakultätschreibweise zurückgeht.

Im Falle  $k = 2$  drückt (3) das Konstruktionsgesetz für das Pascalsche Dreieck aus; die Beziehung geht nämlich dann über in

$$\begin{aligned} P_{(\mu_1, \mu_2 - 1)}^{(n)} + P_{(\mu_1 - 1, \mu_2)}^{(n)} &= P_{(\mu_1, \mu_2)}^{(n+1)} \quad \text{mit} \quad \mu_1 + \mu_2 = n + 1 \\ \text{bzw.} \quad \binom{n}{\mu_1} + \binom{n}{\mu_1 - 1} &= \binom{n+1}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dies bedeutet, daß im Pascalschen Dreieck die Summe zweier benachbarter Glieder der  $n$ -ten Zeile gleich dem dazwischenstehenden Glied der  $(n + 1)$ -ten Zeile ist.

Entsprechend wie sich die Entwicklungskoeffizienten für  $k = 2$  in einem nach einer Richtung fortsetzbaren Dreieck anordnen lassen, kann man sie für  $k = 3$  in einem nach einer Richtung fortsetzbaren Tetraeder zusammenstellen. Dabei drückt (3) wieder das Konstruktionsgesetz aus; aus den Koeffizienten für festes  $n$  lassen sich sofort die Koeffizienten mit dem Index  $n + 1$  berechnen.

Im Pascalschen Dreieck sind die Koeffizienten mit festem  $n$  symmetrisch auf einer Strecke angeordnet:

$$P_{(n, 0)}^{(n)}, \quad P_{(n-1, 1)}^{(n)}, \quad \dots, \quad P_{(1, n-1)}^{(n)}, \quad P_{(0, n)}^{(n)}.$$

Die logische Verallgemeinerung auf  $k = 3$  führt auf die symmetrische Anordnung der Koeffizienten mit festem  $n$  in Form eines Dreieckes, d. h. auf

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_{(n, 0, 0)}^{(n)} & & & & \\ & P_{(n-1, 1, 0)}^{(n)} & & P_{(n-1, 0, 1)}^{(n)} & & & \\ & \cdot & & \cdot & & & \\ & \cdot & & \cdot & & & \\ & \cdot & & \cdot & & & \\ P_{(0, n, 0)}^{(n)} & & P_{(0, n-1, 1)}^{(n)} & & P_{(0, 0, n)}^{(n)} & & \end{array}$$

Wir legen nun die Ebenen dieser Zahlendreiecke in der Reihenfolge, die durch den Index  $n$  gegeben ist, derart übereinander, daß ein nach einer Richtung fortsetzbares Zahlentetraeder entsteht. Das Konstruktionsgesetz für dieses Zahlentetraeder lautet gemäß (3):

$$P_{(\mu_1, \mu_2, \mu_3 - 1)}^{(n)} + P_{(\mu_1, \mu_2 - 1, \mu_3)}^{(n)} + P_{(\mu_1 - 1, \mu_2, \mu_3)}^{(n)} = P_{(\mu_1, \mu_2, \mu_3)}^{(n+1)} \quad (5)$$

mit

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = n + 1.$$

Oder: Im trinomischen Zahlentetraeder ist die Summe dreier benachbarter Glieder der  $n$ -ten Ebene gleich dem darunter stehenden Glied der  $(n + 1)$ -ten Ebene. Dabei ist unter benachbart die Stellung  $* * *$  gemeint.

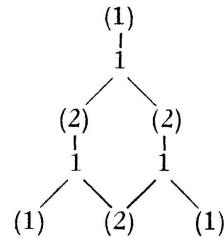
Nachfolgend seien einige Koeffizientendreiecke für sukzessive  $n$  nach (5) berechnet.

Dreieck  $D_1$ :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 1 & 1 \end{array}$$

Bildung von  $D_2$ :

$$\begin{array}{c} (1) \\ | \\ (2) \end{array}$$



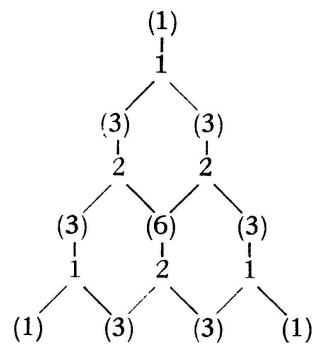
Durch die Klammern ist angedeutet, daß die entsprechenden Zahlen in der folgenden Ebene liegen.

Dreieck  $D_2$ :

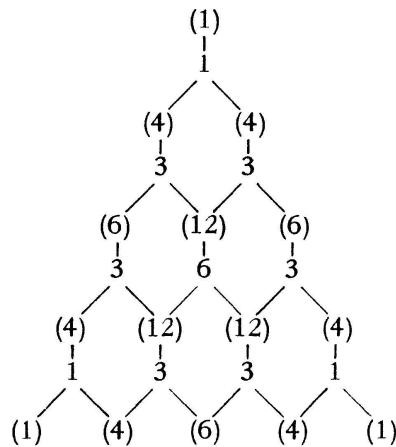
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Bildung von  $D_3$ :

$$\begin{array}{c} (1) \\ | \\ (3) \end{array}$$



Schließlich noch die Bildung von  $D_4$  aus  $D_3$ :



Eine anschauliche Darstellung dieses Koeffiziententetraeders ergibt sich, wenn man die Koeffizienten für festes  $n$  je auf ein durchsichtiges Blatt Papier schreibt und dann die verschiedenen Blätter übereinanderlegt.

Die für  $k = 2$  und  $k = 3$  vorgenommene Koeffizientenanordnung läßt sich leicht auf den Fall der polynomischen Entwicklung mit beliebigem  $k$  verallgemeinern. Es sei  $S_k$  das Symbol für ein  $k$ -dimensionales Simplex, d. h.  $S_1$  bedeute eine Strecke,  $S_2$  ein Dreieck usw. Man kann nun zeigen, daß bei Anordnung der Polynomalkoeffizienten für festes  $n$  in einem Zahlensimplex  $S_{k-1}$ , die sukzessive Aneinanderreihung der Hyperebenen dieser  $S_{k-1}$  zu einem nach einer Richtung fortsetzbaren  $S_k$  führt. Die Beziehung (3) drückt dann das Konstruktionsgesetz dieses Koeffizientensimplex aus:

Im polynomischen Koeffizientensimplex ist die Summe  $k$  «benachbarter» Glieder derselben Hyperebene gleich dem «dazwischenliegenden» Glied der folgenden Hyperebene.

M. JEGER, Zürich.

**II. Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes  
aus dem Satze von Pappos-Pascal**

Im folgenden wird eine besonders übersichtliche Darstellung der zuerst von HESSENBERG (1905) bewiesenen Tatsache gegeben, daß sich der Satz von DESARGUES in der ebenen Geometrie allein unter Benützung der Verknüpfungsaxiome aus dem Pappos-Pascalschen Satze ergibt. Der Übersichtlichkeit wegen formulieren wir die Sätze mit Benützung des Begriffes der Parallelität, also mit Auszeichnung einer Geraden als unendlichferner Geraden. Die Betrachtungen lassen sich aber unmittelbar auch ohne diese Auszeichnung durchführen.

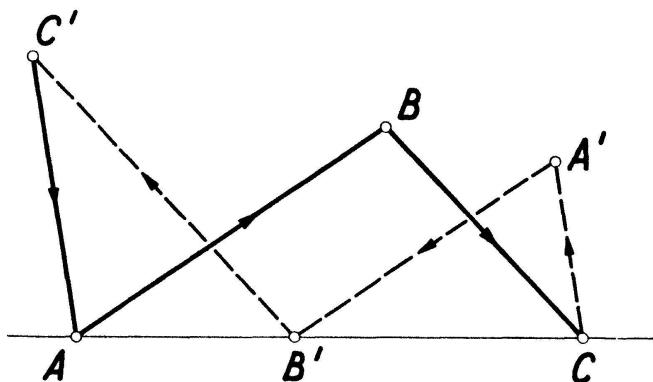


Fig. 1

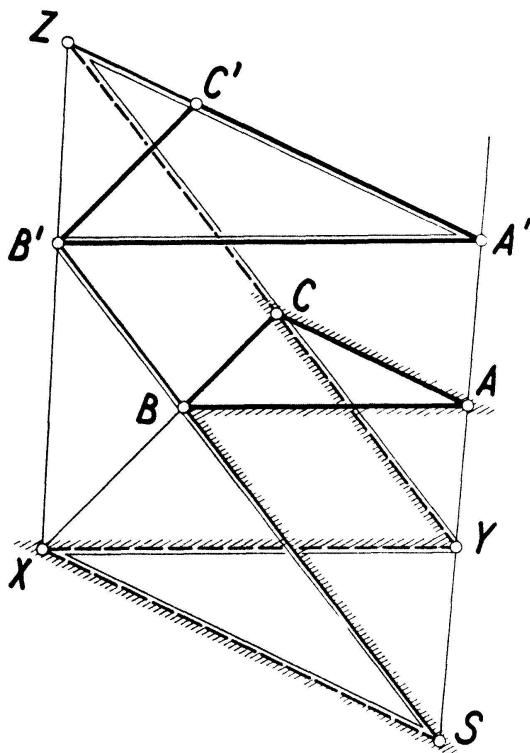


Fig. 2

Den Satz von PAPPOS-PASCAL verwenden wir in der folgenden Form: *Es sei  $C'ABC$  ein beliebiger Streckenzug (Fig. 1), ferner  $CA'B'C'$  ein ergänzender Streckenzug, dessen Ecke  $B'$  auf der Geraden  $AC$  liegt und dessen Strecken parallel denen des ersten Zuges laufen:  $CA' \parallel C'A$ ,  $A'B' \parallel AB$ ,  $B'C' \parallel BC$ . Dann liegen die Punkte  $A'$ ,  $B$ ,  $C'$  in einer Geraden.*

Durch dreimalige Anwendung solcher Pappos-Figuren, die wir hier kurz mit  $(C'ABC A'B'C')$  bezeichnen, läßt sich der Desarguessche Satz beweisen: *Haben zwei Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  die Eigenschaft, daß die Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  des einen parallel den entsprechend bezeichneten Seiten  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  des anderen sind, und ist  $S$  der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden  $AA'$  und  $BB'$ , dann liegen die Punkte  $S$ ,  $C$  und  $C'$  in einer Geraden.*

*Beweis* (Fig. 2): Man lege durch  $C$  die Parallele zu  $SBB'$ ;  $Y$  sei der Schnittpunkt dieser Parallelen mit  $SAA'$ . Durch  $Y$  ziehe man die zu  $AB$  (und  $A'B'$ ) parallele Gerade, ferner durch  $S$  die zu  $AC$  (und  $A'C'$ ) parallele Gerade;  $X$  sei der Schnittpunkt dieser Geraden. Aus der Pappos-Figur  $(XSBACYX)$  folgt, daß die drei Punkte  $X$ ,  $B$ ,  $C$  in einer Geraden liegen.

Weiter sei  $Z$  der Schnittpunkt der Geraden  $A'C'$  und  $YC$ . Die Pappos-Figur  $(ZA'B'SYZ)$  ergibt, daß  $X$ ,  $B'$  und  $Z$  in einer Geraden liegen.

Endlich folgt aus der Pappos-Figur ( $XSB'C'ZCX$ ), daß die drei Punkte  $S$ ,  $C$  und  $C'$  einer Geraden angehören, was zu beweisen war. **J. KARAMATA, Belgrad.**

*Anmerkung.* Die für den axiomatischen Aufbau wichtige Zurückführung des Desarguesschen Satzes auf den Pascalschen Satz findet man z. B. in den folgenden Werken:

G. HESSEMBERG, *Grundlagen der Geometrie* (Berlin und Leipzig 1930), S. 74.

H. LIEBMANN, *Synthetische Geometrie* (Leipzig und Berlin 1934), § 13 (Beitrag von M. STECK).

B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna* (Bologna 1948), S. 124.

Manchem Leser wird die obige Anordnung von Herrn KARAMATA willkommen sein.

### III. *A propos des abaques hexagonaux*

1° Dans l'espace, soit un système d'axes trirectangle  $OXYZ$ . Considérons une relation linéaire entre les trois coordonnées d'un point.

$$a x + b y + c z = d.$$

Graduons provisoirement l'axe des  $x$ , de telle sorte que la longueur  $d/a$  soit égale à l'unité de longueur; opérons de même sur les autres axes, la relation devient:

$$x + y + z = 1.$$

Projetons orthogonalement la figure sur le plan  $\pi$  représenté par cette équation; on obtient une isométrie orthogonale. Les lieux à  $x$ ,  $y$  et  $z$  constants sont respectivement des parallèles aux traces du plan  $\pi$ , donc des perpendiculaires aux axes  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

Graduons ces axes selon les cotes de ces droites. Par le point d'intersection de deux d'entre elles, menons la troisième; elle coupe l'axe correspondant en un point dont l'abscisse détermine la troisième variable.

La figure permet la résolution graphique de l'équation

$$f(x) + g(y) + h(z) = 0.$$

Le 1 du second membre a été incorporé au premier membre. Pour résoudre graphiquement ce système, on anamorphose les axes, c'est-à-dire que le point de l'axe  $OX$  d'abscisse  $f(x)$  est marqué  $x$ ; et on opère de même sur  $OY$  et  $OZ$ .

2° — L'avantage du choix d'une isométrie orthogonale est la symétrie de la figure, relativement aux trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Dans la pratique, l'une des variables,  $z$  pour fixer les idées, joue souvent le rôle de fonction, les deux autres étant indépendantes. Dans ce cas, au lieu d'une isométrie orthogonale, faisons une projection orthogonale du plan de l'espace sur le plan  $OXY$ .

Les droites  $z = \text{const.}$  se projettent suivant des perpendiculaires à la bissectrice de l'angle  $XOY$ , les droites  $x = \text{const.}$  et  $y = \text{const.}$ , suivant des parallèles à ces mêmes axes.

Comme plus haut, graduons les axes selon les cotes des droites du plan qui leur sont perpendiculaires.

Supposons que  $x$  et  $y$  soient donnés. Les droites correspondantes sont perpendiculaires aux axes; leur intersection est graphiquement bien déterminée, puisque orthogonale. Par cette intersection, menons la droite  $z = \text{const.}$ ; elle coupe encore orthogonalement l'axe des  $z$ .

Dans cette disposition, on passe des deux valeurs  $x$  et  $y$  à  $z$ , en ne construisant que des intersections orthogonales. C'est dire que la précision de la construction est maximum. Enfin on n'utilise que des perpendiculaires ou des obliques à  $45^\circ$  sur l'axe de symétrie de la figure.

P. ROSSIER, Genève.

### IV. *Bemerkung zum Beweis des Primzahlsatzes*

Bekanntlich läßt sich der Beweis des Primzahlsatzes auf den der Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(n)/n$  zurückführen, wobei  $\vartheta(n)$  die Summe der Logarithmen derjenigen Primzahlen bedeutet, die  $n$  nicht übertreffen. In der vorliegenden kleinen Note wird gezeigt,

daß die Möglichkeit dieser Reduktion eine unmittelbare Folge des nachstehenden elementaren Hilfssatzes<sup>1)</sup> ist:

Sei  $b_n$  monoton abnehmend und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , ferner sei  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  divergent. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}, \quad (1)$$

falls nur der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

1. Bei vorausgesetzter Konvergenz von  $\vartheta(n)/n$  sei

$$a_k = \begin{cases} \log k & \text{für } k = \text{Primzahl}, \\ 0 & \text{für alle anderen Werte von } k, \end{cases} \quad (2)$$

$$b_1 = 0, \quad b_k = \frac{1}{k \log k}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (3)$$

Dann sind die Bedingungen des Hilfssatzes offensichtlich erfüllt, und man erhält nach (1) wegen

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \log \log n + V(1)^2, \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} = \int_2^n \frac{dx}{x \log x} + V(1) = \log \log n + V(1), \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{p \leq n} \log p = \vartheta(n) \quad (4)$$

unmittelbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(n)}{n} = 1. \quad (5)$$

2. Wählen wir  $a_k$  wie zuvor [in (2)] und sei

$$b_1 = 0, \quad b_k = \frac{1}{\log k}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Nach (5) sind die Bedingungen des Hilfssatzes auch jetzt erfüllt. Folglich erhält man nach (1), (4), (5) und

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{p \leq n} 1 = \pi(n), \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\log k} = \int_2^n \frac{dx}{\log x} + V(1)$$

den Primzahlsatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\int_2^n dx / \log x} \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(n)}{n} \right) = 1.$$

L. PUKÁNSZKY, Debrecen.

## V. Die Quadratur des Kreises in Näherungskonstruktionen

Herr WALTER H. LOWSTON, New York, teilt uns die folgende Näherungskonstruktion für die *Kreisfläche* mit. Bei dieser Gelegenheit erinnern wir an zwei andere Konstruktionen, die zwar etwas mehr Zeichnung erfordern, aber in anderer Hinsicht bemerkenswert sind.

<sup>1)</sup> E. CESÀRO, *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (Teubner, Leipzig 1904), S. 100.

<sup>2)</sup>  $p$  soll hier und in den nachstehenden Summen darauf hindeuten, daß nur über die Primzahlwerte zu summieren ist.

Ich zeige hier, wie für einen gegebenen Kreis ein Quadrat konstruiert werden kann, dessen Fläche fast gleich dem Inhalt des Kreises ist. — Die Genauigkeit der Konstruktion zeigt sich in der Tatsache, daß der Fehler für die Seite des Quadrats (im Verhältnis zu  $\pi$ ), geringer ist als 0,06%.

Die Konstruktion ist folgende:

In der Zeichnung haben wir zunächst  $AB$  als Durchmesser des Kreises, und rechtwinklig dazu den Radius  $OC$ . Der Radius  $OD$  bildet einen Winkel von  $45^\circ$  mit  $AB$ . Punkt  $E$  auf der Linie  $CB$  ist bestimmt, indem  $BE$  ein Viertel von  $BC$  ist. Verbinde ich  $D$  mit  $E$ , so schneidet die Verlängerung die Grundlinie  $AB$  in  $F$ , und der Abschnitt  $AF$  ist die Seite unseres gesuchten Quadrats. Seine Länge ist  $(11 + \sqrt{2})/7$ -mal so groß wie der Radius des Kreises. Das ist ungefähr gleichbedeutend, als nähme man 1,77346 anstatt 1,77245 für  $\sqrt{\pi}$ .

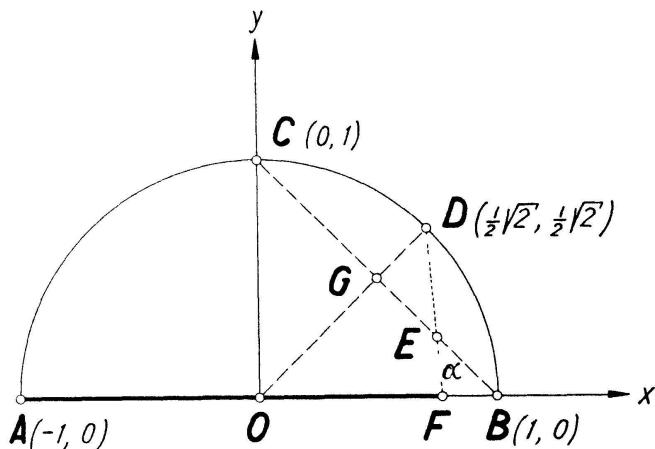


Fig. 1

Setzen wir den Radius des Kreises gleich 1, dann errechnen wir  $FB$  nach dem Sinusatz im  $\triangle EFB$ . Wir bezeichnen mit  $\alpha$  den  $\angle FEB$ :  $\angle EFB$  ist natürlich  $= 135^\circ - \alpha$ , so daß  $\sin EFB = \sin (45^\circ + \alpha)$  ist.

Wir haben

$$FB = \frac{EB \sin \alpha}{\sin EFB} = \frac{EB \sin \alpha}{\sin (\alpha + 45^\circ)}.$$

Da nun  $EB = \sqrt{2}/4$ , so erhalten wir leicht

$$FB = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg} \alpha)}.$$

Den Wert von  $\operatorname{tg} \alpha$  erhalten wir aus dem  $\triangle DGE$ . Er ist  $GD/GE$ , also

$$\frac{1 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/4} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Somit ist

$$FB = \frac{3 - \sqrt{2}}{7}.$$

Dann ergibt sich  $AF$ , die Linie, deren Länge wir suchen,

$$AF = \frac{11 + \sqrt{2}}{7} \approx 1,77346.$$

WALTER H. LOWSTON<sup>1)</sup>, New York.

<sup>1)</sup> Wir bedauern auch an dieser Stelle den unterdessen erfolgten plötzlichen Tod des fernen Mitarbeiters. — Als Quelle hat er uns genannt: H. Lowston, *A Note on a Approximation to the Square of the Circle*, Nat. Math. Mag. 17, Nr. 2 (1942).

Macht sich hier der Fehler im Dezimalbruch für die Quadratwurzel aus  $\pi$  immerhin in der 3. Stelle nach dem Komma geltend, so verschiebt er sich in die 5. Stelle bei der folgenden Konstruktion von F. ENRIQUES (Fig. 2)<sup>1)</sup>.

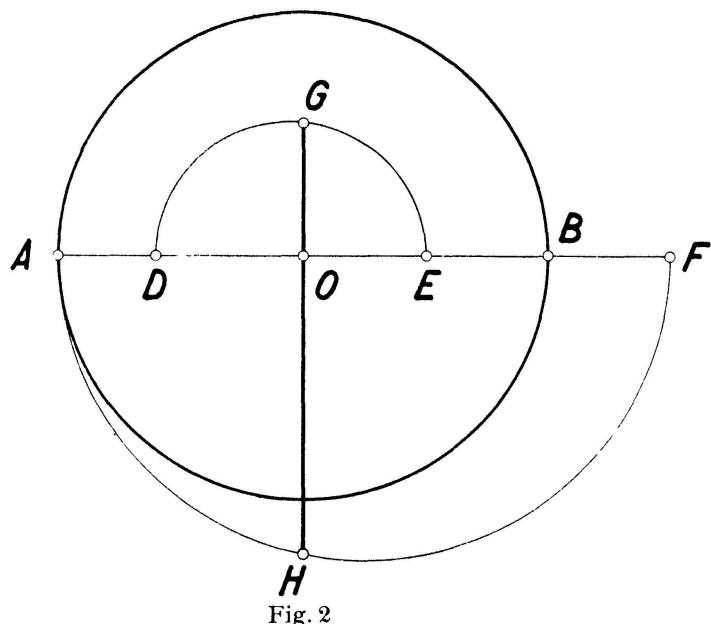


Fig. 2

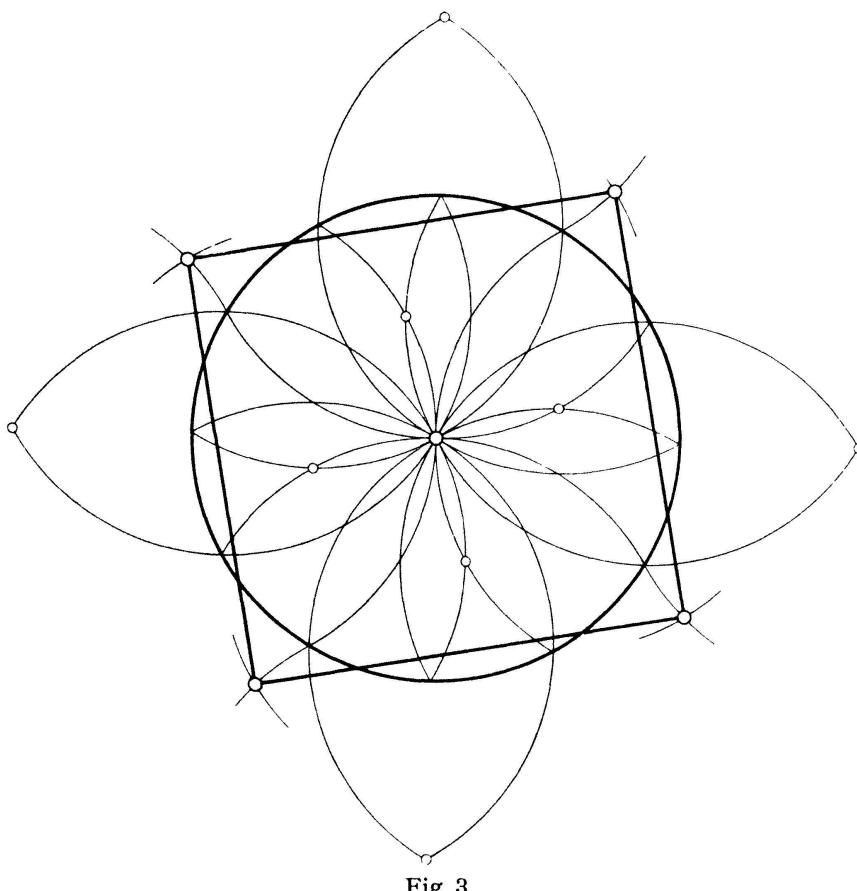


Fig. 3

Auf dem Durchmesser  $AB$  des gegebenen Kreises trage man die Strecke  $OD$  gleich 3 Fünfteln des Radius und nach der andern Seite die Strecke  $OF$  gleich 3 Hälften des

<sup>1)</sup> F. ENRIQUES, *Fragen der Elementargeometrie*, deutsche Ausgabe von H. FLEISCHER, Bd. II, S. 303/04. Möglicherweise stammt aber diese Konstruktion aus der *Geometria elementare* von SANNIA und d'OIDIO.

Radius ab; dann halbiere man den Radius  $OB$  in  $E$  und schlage über  $DE$  und  $AF$  als Durchmesser Halbkreise auf entgegengesetzte Seiten von  $AB$ . Errichtet man nun in  $O$  auf  $AB$  die Normale, die die beiden Halbkreise in  $G$  und  $H$  schneiden mag, so stellt das Quadrat, das  $GH$  zur Seite hat, mit großer Annäherung den Flächeninhalt des gegebenen Kreises dar.

Die recht elementare Ausrechnung liefert

$$GH = r \sqrt{\frac{30 + \sqrt{150}}{10}} = r \cdot 1,77246 \dots$$

Die Berechnung gestaltet sich leicht, wenn man in jedem Halbkreis den Höhensatz anwendet. Für weitere Näherungskonstruktionen sei auf einen schönen Aufsatz von P. FINSLER hingewiesen<sup>1)</sup>. Wir geben daraus ein Beispiel wieder, das von A. KÄGI, Thayngen, im November 1934 brieflich mitgeteilt wurde, zwar eine viel heiklere Konstruktion aufweist, aber dafür, was man selten sieht, direkt auf die vier Quadrat-ecken führt. So findet man in Fig. 3 das vielumworbene Quadrat einmal wirklich auf den Kreis gelegt. Auch braucht nur eine feste Zirkelöffnung mit dem Radius des gegebenen Kreises verwendet zu werden.

In den Kreis vom Radius  $r$  wird mit Kreisen vom selben Radius, die durch den Mittelpunkt gehen, eine regelmäßige Zwölferrosette gezeichnet. Das bedarf neben der Sechsteilung des Kreises nur noch der Halbierung. Wie in der Figur werden 8 Kreisbögen so weit gezogen, daß sie sich außerhalb des gegebenen Kreises noch auf zwei zu einander normalen Symmetrieachsen schneiden, im Abstand  $r\sqrt{3}$  vom Mittelpunkt. Von den inneren Schnittpunkten der Rosette werden vier ausgewählt, die zunächst bei den Symmetrieachsen liegen und selber die Ecken eines kleinen Quadrates bilden (kleine Kreise der Figur). Die Ecken des gesuchten Quadrates haben von je einem äußeren Schnittpunkt und einem inneren, aber auf entgegengesetzter Seite der Symmetrieachse, den Abstand  $r$ , können also wiederum als Schnittpunkte von Kreisbögen gefunden werden. Die Quadratseite ergibt sich rechnerisch zu

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{13}(84\sqrt{3} - 141)r} \approx 1,77319r;$$

sie wird also um etwa  $2r/2700$  oder  $0,042\%$  zu groß.

E. VOELLMY.

## VI. Kugel und einschaliges Hyperboloid

Die ovalen Flächen zweiten Grades (Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid) lassen sich durch reelle Kollineationen ineinander überführen. Das einschalige Hyperboloid (eH) hingegen kann durch eine reelle Kollineation niemals in eine ovale Fläche umgeformt werden. Das ist eine Folge des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen. Anschaulich zeigt es sich darin, daß die ovalen Flächen keine reellen Erzeugenden besitzen. Zwar läßt sich das eH über seinen Asymptotenkegel in ein zweischaliges Hyperboloid, dieses dann in bekannter Weise in ein Ellipsoid umformen. Ein solcher reeller Übergang ist aber nur möglich, wenn man eine *Ausartung* als Durchgangsform, hier den Asymptotenkegel, in Kauf nimmt. Jedoch kann man durch *imaginäre* Kollineation eine stetige Überführung ohne solche Ausartungen vollziehen. Bekanntlich wird von imaginären Kollineationen Gebrauch gemacht<sup>2)</sup>, um zum Beispiel Eigenschaften der Kugel mit entsprechenden des eH zu vergleichen. Es mag daher von Interesse sein, die gewöhnlich nur analytisch betrachteten imaginären Kollineationen auch zur vollen geometrischen Anschauung zu bringen. Hierzu kann die früher<sup>3)</sup> erläuterte reelle Darstellung der imaginären Elemente dienen. Wir bringen

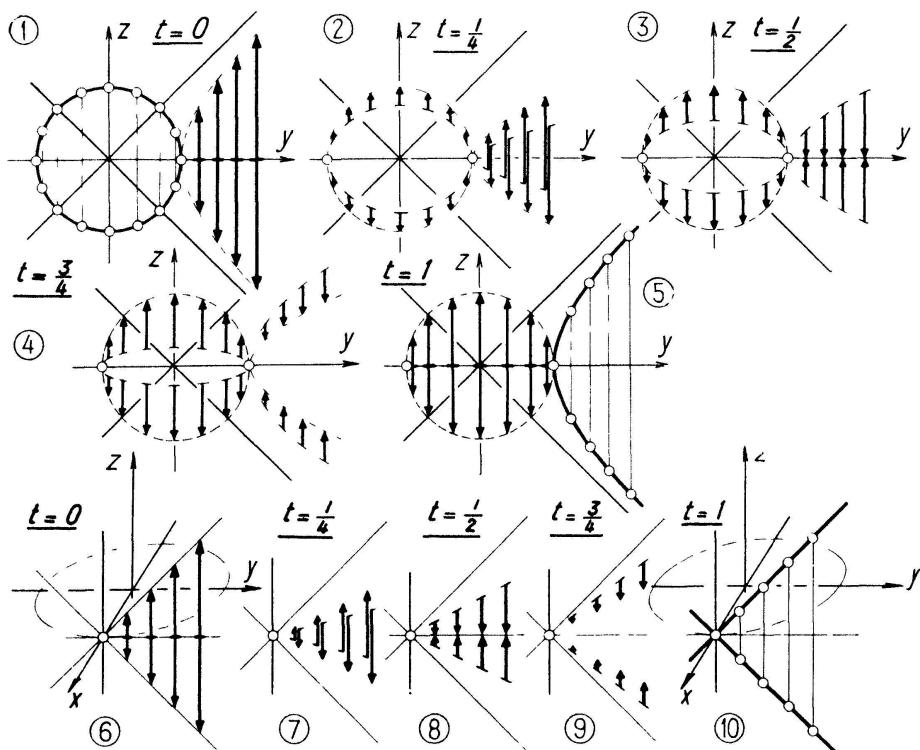
<sup>1)</sup> PAUL FINSLER, *Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen*, Commentarii mathematici Helvetici 10, 251 (1937/38).

<sup>2)</sup> Siehe z. B. F. KLEIN, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, 3. Aufl. (Berlin 1926), S. 182.

<sup>3)</sup> L. LOCHER-ERNST, *Das Imaginäre in der Geometrie*, El. Math. 4, H. 5 und 6 (1949).

hier nur in Erinnerung, daß der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x = a + ia'$ ,  $y = b + ib'$ ,  $z = c + ic'$  ( $a, a'$  usw. reell) durch den Pfeil mit dem Anfangspunkt  $A(a, b, c)$  und dem Endpunkt  $B(a + a', b + b', c + c')$  dargestellt werden kann. Dieser Pfeil ist das Zeichen für die durch den Punkt  $P$  bestimmte gerichtete elliptische Punktinvolution. In dieser Darstellung bedeutet eine stetige Transformation eine stetige Verwandlung einer Pfeilmannigfaltigkeit in eine andere. (Die Transformation ist kollinear, wenn Wirbel wieder in Wirbel übergehen; siehe die in Fußnote 3, S. 15 erwähnte Arbeit.)

Wir beschränken uns in dieser Note darauf, den einfachsten kollinearen Übergang der Kugel mit der Gleichung  $xx + yy + zz = 1$  in das eH mit der Gleichung  $xx + yy - zz = 1$  anschaulich darzustellen. Hierzu genügt die imaginäre Affinität  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = uz$ , wobei der variable, von  $x, y, z$  unabhängige Koeffizient  $u$



die Form  $u = 1 - t + it$  habe und  $t$  stetig von  $t = 0$  bis  $t = 1$  zunehme. Wir betrachten also die für  $0 < t < 1$  imaginären Flächen mit der Gleichung

$$z = \pm u \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \pm i u \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad (u = 1 - t + it, t = 0 \rightarrow 1). \quad (1)$$

Für  $t = 0$  stellt (1) eine Kugel, für  $t = 1$  ein eH dar. Die Figuren 1 bis 5 zeigen den Übergang im Schnitt mit der  $(y, z)$ -Ebene ( $x = 0$ ). Hierbei sind die  $z$ -Pfeile nur für reelle  $y$  angedeutet. Gezeichnet sind die Stationen  $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ . Die reellen Punkte (ausgeartete Pfeile) des Kreises ( $t = 0$ ) werden zu Pfeilen mit wachsender Länge; die Endpunkte bleiben hierbei auf dem Ausgangskreis, die Anfangspunkte wandern schließlich bis zur  $y$ -Achse. Die Pfeile, welche die imaginären Punkte des Kreises ( $t = 0$ ) für reelle  $y$  darstellen, nehmen an Länge (Betrag des Imaginärteiles) ab, während die Pfeilanfangspunkte von der  $y$ -Achse sich nach unten bzw. oben verschieben bis zur gleichseitigen Hyperbel, deren reelle Punkte die Endstationen darstellen. (Die Punkte des Schnittkreises der Flächen (1) mit der  $(x, y)$ -Ebene bleiben ungeändert.)

Die Kugel besitzt zwei Scharen von je  $\infty^2$  imaginären Erzeugenden (spezielle imaginäre Geraden), während das eH außer  $\infty^2$  allgemeinen imaginären Geraden insbesondere auch zwei Scharen von  $\infty^1$  reellen Erzeugenden trägt. Die Figuren 6 bis 10 deuten an, wie diese bei unserer affinen Umformung der Kugel zustande kommen. Sie

ergeben sich aus denjenigen Erzeugenden (rotatorische Wirbel) der Kugel, deren reelle Punkte in der  $(x, y)$ -Ebene liegen. Die übrigen Erzeugenden der Kugel werden in allgemeine imaginäre Geraden des eH umgewandelt. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

## VII. Eine Bemerkung zum Axiom von Pasch in Hilberts «Grundlagen der Geometrie»

Wir zitieren vorerst das Axiom von PASCH II 4 nach der 7. (letzten) Auflage der *Grundlagen* und behalten im übrigen die dortige Numerierung bei.

*II 4. (7. Auflage):* Es seien  $A, B, C$  drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und  $a$  eine Gerade in der Ebene  $ABC$ , die keinen der Punkte  $A, B, C$  trifft: wenn dann die Gerade  $a$  durch einen Punkt der Strecke  $AB$  geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke  $AC$  oder durch einen Punkt der Strecke  $BC$ .

In einem *Zusatz* wird bemerkt: «Daß nicht beide Strecken  $AC$  und  $BC$  von der Geraden  $a$  geschnitten werden können, ist dann beweisbar» (auf Grund der Axiome I, II 1–4).

Dieser Zusatz erscheint überflüssig, denn gemäß II 4 wird ja gefordert,  $a$  gehe «entweder» durch  $AC$  oder  $BC$ . Es handelt sich offenbar um ein redaktionelles Versehen. In der 4. Auflage der *Grundlagen* (die andern waren uns nicht zugänglich) war das Wort «entweder» ausgelassen; so wird der Zusatz zu einer nichttrivialen Aussage.

Für diesen Zusatz wollen wir einen einfachen Beweis geben.

Zur bequemeren Lesbarkeit geben wir die zu verwendenden Axiome im Wortlaut wieder:

I 1. Zu zwei Punkten  $A, B$  gibt es stets eine Gerade  $a$ , die mit jedem der beiden Punkte  $A, B$  zusammengehört.

I 2. Zu zwei Punkten  $A, B$  gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte  $A, B$  zusammengehört.

II 1. Wenn ein Punkt  $B$  zwischen einem Punkt  $A$  und einem Punkt  $C$  liegt, so sind  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte einer Geraden und  $B$  liegt dann auch zwischen  $C$  und  $A$ .

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden andern liegt.

Es bezeichne ferner *II 4\** das Axiom von Pasch ohne das verschärfende Wort «entweder».

Wir behaupten dann:

*Satz 1:* Unter alleiniger Verwendung der Axiome I 1, I 2, II 1, II 3 und *II 4\** ist das starke Axiom von Pasch II 4 beweisbar.

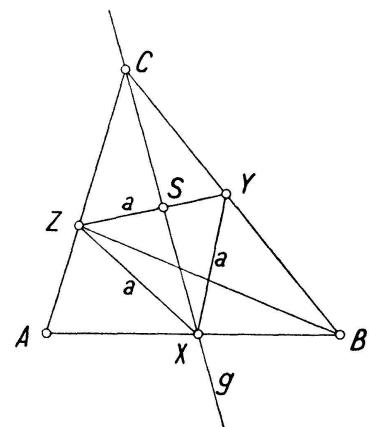
Wir beweisen Satz 1 in folgender äquivalenten Fassung:

*Satz 2:* Unter denselben Voraussetzungen wie Satz 1 gilt: Es seien  $A, B, C$  drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und  $a$  eine Gerade, die keinen der Punkte  $A, B, C$  trifft; dann trifft sie auch nicht alle drei Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$ .

*Beweis:* Entgegen der Behauptung sei  $a$  eine Gerade, die alle drei Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  treffe, und zwar bzw. in den Punkten  $X, Y$  und  $Z$ . Die sechs Punkte  $A, B, C, X, Y, Z$  sind dann alle voneinander verschieden (I 1–2, II 1).

Gemäß I 1 gibt es eine Gerade  $g$ , die durch  $C$  und  $X$  geht. Im Dreieck  $ABZ$  sind bezüglich  $g$  die Voraussetzungen von *II 4\** erfüllt. Wegen II 3 kann  $g$  die Strecke  $AZ$  nicht treffen; also trifft  $g$  die Strecke  $BZ$ . Im Dreieck  $BYZ$  sind deshalb bezüglich  $g$  wieder die Voraussetzungen von *II 4\** erfüllt.  $g$  trifft  $BY$  nicht (II 3). Somit trifft  $g$  die Strecke  $YZ$  in einen Punkt  $S$ .  $S$  muß aber mit  $X$  identisch sein, denn  $g$  und  $a$  haben nur einen Punkt gemeinsam. *Also liegt X zwischen Y und Z.*

Mit derselben Schlußweise beweist man, daß auch *Y zwischen X und Z liegt*, indem man an Stelle der Geraden  $g$  eine Gerade  $h$  durch  $A$  und  $Y$  betrachtet. (Analog folgt, daß *Z zwischen X und Y liegt*.)



Damit haben wir aber einen *Widerspruch* gegen *Axiom II 3* konstruiert. *Die Gegenannahme ist also zu verwerfen und Satz 2 ist vollständig bewiesen.*

W. GRUNER, R. STETTLER, Bern.

## Aufgaben

**Aufgabe 56.** In wie viele Gebiete wird die Ebene durch  $n$  Kreise zerlegt, die die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte haben? C. BINDSCHEDLER (Küschnacht).

1. *Lösung:*  $G(n)$  sei die Anzahl der Gebiete bei  $n$  Kreisen.  $G(1) = 2$ . Der  $n$ -te Kreis wird durch die  $n - 1$  übrigen Kreise in  $2(n - 1)$  Bogenstücke zerlegt, von denen jedes ein Gebiet in zwei Teile teilt, so daß  $2(n - 1)$  neue Gebiete entstehen. Daher ist

$$G(n) = 2 + 2 \{1 + 2 + \dots + (n - 1)\} = 2 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{2} = \underline{\underline{n^2 - n + 2}}.$$

Denselben Wert für  $G(n)$  erhält man, wenn die Kreise auf der Oberfläche einer Kugel liegen. Damit läßt sich die Anzahl  $K(n)$  der Teile finden, in die der Raum durch  $n$  Kugeln geteilt wird, bei denen die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte von drei Kugeln auftritt. Die  $n$ -te Kugel wird durch die andern in  $n - 1$  Kreisen mit maximaler Schnittpunktanzahl geschnitten, so daß die Kugelfläche in  $n(n - 1) + 2$  Flächenstücke zerlegt wird. Jedes Flächenstück teilt ein Raumgebiet in zwei Teile, wobei stets ein neues Teilstück entsteht. Somit ist

$$K(n) = 2 \sum_{n=2}^n \binom{n-1}{1} + 2(n-1) + 2 = 2 \binom{n}{3} + 2 \binom{n}{1}.$$

H. FÄHNDRICH (Bern).

2. *Lösung:* Es sei  $e(n)$  die Zahl der Schnittpunkte der  $n$  Kreise,  $k(n)$  die Zahl der unmittelbar benachbarte Punkte verbindenden Kreisbögen («Kanten») und  $f(n)$  die Zahl der Gebiete, dann ist nach EULER:

$$f(n) = k(n) + 2 - e(n) \quad [k(1) = 0] \quad (1)$$

Nun ist  $e(n) = 2 \binom{n}{2} = n(n - 1)$ . (2)

$k(n)$  findet man z. B. mit Hilfe einer Rekursionsformel. Gibt man zu  $v - 1$  Kreisen einen weiteren, so entstehen auf den ersten offenbar  $2(v - 1)$  neue «Kanten», ebenso viele aber auch auf dem  $v$ -ten Kreis. Also ist

$$k(v) = k(v - 1) + 4(v - 1). \quad (v \geq 2) \quad (3)$$

Setzt man hierin der Reihe nach  $v = 2, 3, \dots, n$  und addiert die erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$k(n) = 4[1 + 2 + \dots + (n - 1)] = 4 \binom{n}{2} = 2n(n - 1). \quad (4)$$

Aus (3), (2) und (1) folgt:

$$\underline{\underline{f(n) = 2n(n - 1) + 2 - n(n - 1) = n(n - 1) + 2}}. \quad (5)$$

Für Kurven, die sich paarweise in  $m$  Punkten schneiden, erhält man in entsprechender Weise

$$f(n) = \frac{1}{2} m n(n - 1) + 2.$$

B. SCHENKER (Fetan).