Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 5 (1950)

Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

insofern eine Täuschung, als die Rundungsfehler so groß werden können, daß sie diese Entscheidung nicht mehr erlauben. Transformiert man etwa die Gleichung

$$f_0(z) \equiv z^4 - 4\,z^3 + 5{,}999951\,z^2 - 4\,z + 1 = 0 \tag{4}$$

und rechnet dabei mit vier Dezimalen, so enthalten die Koeffizienten der dritten Transformierten bereits Fehler von $2^0/_0$, die der vierten solche von $35^0/_0$ und in der fünften wachsen die Fehler auf über $500^0/_0$ an!

Es ist dann allerdings auf anderem Weg (mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln und durch Einführung des sogenannten Newtonschen Diagramms) gelungen, die Methode von Graeffe in dieser Beziehung zu vervollständigen. Auf Einzelheiten kann im Rahmen dieses Berichtes nicht eingegangen werden. Der Leser sei dafür auf die Arbeit von A. Ostrowski, *Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent* (Acta math. *72*, 99 [1940]) verwiesen.

Die Gleichung (4) zeigt übrigens sehr schön, daß – obwohl natürlich die Wurzeln stetig von den Koeffizienten abhangen – eine geringe Änderung der letzteren einen beträchtlichen Einfluß auf die Wurzeln haben kann. Die Gleichung läßt sich nämlich elementar lösen, indem sich die linke Seite als Differenz zweier Quadrate schreiben läßt. Die Wurzeln sind:

$$z_1 \approx 1{,}0872; \qquad z_2 \approx 0{,}9198; \qquad z_{3,4} \approx 0{,}9965 \pm 0{,}0836\,i.$$

Rundet man aber den mittleren Koeffizienten auf 6, so erhält man die Gleichung $(z-1)^4 = 0$, deren Wurzel $z = 1$ gegenüber den obigen genaueren Werten Fehler (bezüglich Betrag) von $1^0/_{00}$ bis $87^0/_{00}$ aufweist, obwohl der Rundungsfehler beim Koeffizienten nur rund $0{,}01^0/_{00}$ beträgt!

Der Referent wies im Anschluß an diese Feststellungen noch darauf hin, daß die unvermeidlichen Rundungsfehler auch der Verwendung der modernen Riesenrechenmaschinen eine Grenze setzen. W. Prokop.

Aufgaben

Aufgabe 70. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be any n real numbers and let be

$$E_n = \frac{\left(\sum\limits_{r=1}^{n} |x_r|\right)^{n(n-1)/2}}{\prod\limits_{r<s} |x_r - x_s|}.$$

Prove that the minimum values of E_n are 4 when $n = 3$, and 256 when $n = 4$.

L. J. Mordell (Cambridge [England]).

Lösung: Wir dürfen $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ voraussetzen.

1. Um das Minimum von $E_3(x_1, x_2, x_3)$ zu bestimmen, zeigen wir zunächst, daß $E_3(x_1 - x_2, 0, x_3 - x_2) \leqq E_3(x_1, x_2, x_3)$. Der Nenner bleibt offensichtlich unverändert, und für den Zähler erhält man

$$(|x_1 - x_2| + |x_3 - x_2|)^3 = (x_1 - x_3)^3 \leqq (|x_1| + |x_3|)^3 < (|x_1| + |x_2| + |x_3|)^3,$$

wenn $x_2 \neq 0$. Soll E_3 nicht mehr verkleinert werden können, so muß also $x_2 = 0$ sein und damit $x_1 > 0$, $x_3 < 0$. Hieraus folgt

$$E_3 = \frac{(|x_1| + |x_3|)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^2}{x_1(-x_3)} = \frac{(x_1 + x_3)^2}{x_1(-x_3)} + 4 \geqq 0.$$

Der minimale Wert von E_3 ist also 4.

2. Wir ersetzen die x_i durch y_i, wo $y_1 = (x_1 - x_4)/2 = -y_4$ und $y_2 = (x_2 - x_3)/2 = -y_3$. Dann ist $\Sigma |y_i| = x_1 - x_4 + x_2 - x_3 \leqq \Sigma |x_i|$; der Zähler kann sich also nicht vergrößern. Ferner gilt $y_1 - y_4 = x_1 - x_4$, $y_2 - y_3 = x_2 - x_3$ und

$$y_1 - y_2 = y_3 - y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_4) - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \geqq \sqrt{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)},$$

$$y_1 - y_3 = y_2 - y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_4) \geqq \sqrt{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}.$$

Somit ist $\Pi |y_r - y_s| \geqq \Pi |x_r - x_s|$, so daß der Nenner sich nicht verkleinert. Der Wert von E_4 wird also bei dieser Substitution sicher nicht vergrößert. Wir bestimmen daher das Minimum von

$$E_4' = \frac{(\Sigma |y_i|)^6}{\underset{r<s}{\Pi} |y_r - y_s|} = \frac{2^4 (y_1 + y_2)^4}{y_1 y_2 (y_1 - y_2)^2}.$$

Setzt man $y_1/y_2 = u > 1$, so wird $E_4' = 2^4 (u+1)^4 u^{-1} (u-1)^{-2}$. Für die Extremstellen findet man wegen $u \neq \pm 1$ die Gleichung $u^2 - 6u + 1 = 0$, so daß $(u+1)^2 = 8u$ und $(u-1)^2 = 4u$. Hieraus ergibt sich für E_4' der Wert 256, der das gesuchte Minimum ist, da kein relatives Maximum existiert. F. GOLDNER (London).

Aufgabe 76. Das dem Kreise mit der Fläche K einbeschriebene regelmäßige Polygon von der Fläche P rollt ohne zu gleiten auf einer Geraden. Eine Ecke beschreibt dabei einen aus Kreisbogen zusammengesetzten Kurvenzug. Man berechne den Inhalt der durch den Kurvenzug und die Gerade begrenzten Flächenstücke.

G. TORDION (Zürich).

Lösung: Die gesuchte Fläche F besteht aus Kreissektoren, deren Zentriwinkel alle gleich dem Außenwinkel des Polygons sind, und aus dazwischengeschobenen Teildreiecken des Polygons, die zusammen die Polygonfläche P ausmachen. Die Sektorradien sind die Verbindungsstrecken zwischen der den Kurvenzug erzeugenden Ecke A und allen andern Ecken des Polygons.

Ist n die Eckenzahl des Polygons und r sein Umkreisradius, dann ist das Quadrat eines solchen Sektorradius, gemäß dem Kosinussatz, gleich $2r^2(1 - \cos 2\pi\nu/n)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Dem Fall $\nu = n$ entspricht die Drehung um A selber, welche nichts beiträgt, und in der Tat ist dann der Klammerausdruck gleich Null. Die Summe der Kosinusse über ν von 1 bis n ist ersichtlich Null (Schwerpunktsabszisse der n-ten Einheitswurzeln in der Ebene der komplexen Zahlen). Daher ist die Summe aller Kreissektoren gleich $(\pi/n) \cdot 2r^2 \cdot n = 2\pi r^2 = 2K$.

Daraus ergibt sich: $\underline{F = P + 2K}$.

Anmerkung. 1. Die Überlegung ändert sich nicht, wenn an die Stelle der Leitgeraden ein m-seitiges reguläres Leitpolygon tritt ($m \geqq n$), dessen Seiten gleich lang sind wie die des Rollpolygons. Es ist dann lediglich der Zentriwinkel $2\pi/n$ der Kreissektoren zu ersetzen durch $2\pi/n \pm 2\pi/m$, wobei das Plus- oder Minuszeichen gilt, je nachdem das Rollpolygon außen oder innen auf dem Leitpolygon abrollt. Demnach wird

$$F_{m,n} = P + 2K\left(1 \pm \frac{n}{m}\right).$$

Für $m < n$ entstehen teilweise unübersichtliche Überschneidungen.

2. Läßt man m und n bei festem Verhältnis gegen unendlich gehen, so erhält man die bekannten Flächenformeln für Zykloidenbögen. Zum Beispiel: Gewöhnliche Zykloide: $n/m = 0$, $F = 3K$. Dreispitzige Epizykloide: $n/m = 1/3$, $F = 11K/3$. Drei-

spitzige Hypozykloide: $F = 7\,K/3$. Kardioide: $n = m$, $F = 5\,K$ (ohne den umschlossenen Leitkreis). A. STOLL (Zürich).

Herr W. LÜSSY (Winterthur) teilt folgende Erweiterung des obigen Resultates mit:

Ein reguläres n-Eck habe die Seite a, den Umkreisradius r und auf dem Lot vom Mittelpunkt M auf die Seite, die am Anfang der Bewegung auf der Gerade g liegt, sei die Strecke $MT = t$ abgetragen. Die Fläche F zwischen der Bahn von T bei einer vollen Umdrehung des Vielecks, den begrenzenden Ordinaten und g soll berechnet werden. Die Verbindungsstrecken von T zu den Ecken des Vielecks seien der Reihe nach mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ bezeichnet. Es ist

$$\varrho_\nu^2 = r^2 + t^2 - 2\,r\,t\cos(2\,\nu - 1)\,\frac{\pi}{n}. \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

F setzt sich zusammen aus $n+1$ Dreiecken, die der Reihe nach den durch die ϱ_ν im Vieleck erzeugten Dreiecken kongruent sind (das erste und das letzte bilden zusammen ein solches Dreieck) und deren Summe folglich P ist, und aus n Sektoren mit dem gemeinsamen Zentriwinkel $2\,\pi/n$, deren ν-ter den Radius ϱ_ν hat. Die Summe dieser Sektoren ist

$$\frac{\pi}{n}\sum_1^n{}_\nu\left(r^2 + t^2 - 2\,r\,t\cos(2\,\nu - 1)\,\frac{\pi}{n}\right) = \pi\,r^2 + \pi\,t^2 - \frac{2\,\pi\,r\,t}{n}\sum_1^n{}_\nu\cos(2\,\nu - 1)\,\frac{\pi}{n}.$$

Es ist $\sum_1^n{}_\nu\cos(2\,\nu - 1)\,\pi/n = 0$ als Realteil der Summe der Wurzeln von $x^n + 1 = 0$. Folglich ist

$$F = P + K + K_1,$$

wenn mit K_1 die Fläche des Kreises mit dem Radius MT bezeichnet wird. Bei Berücksichtigung geeigneter Vorzeichen gilt das Resultat auch, wenn T außerhalb des Vielecks liegt.

Für $n \to \infty$ ergibt sich ein bekannter Satz über die Zykloide (z. B. bei LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven*, Bd. 2, S. 80).

Weitere Lösungen gingen ein von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. BINZ (Biel), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), T. REICH (Glarus), K. RIEDER (Riehen), A. SCHWARZ (Seuzach), R. C. H. YOUNG (London).

Neue Aufgaben

99. Im Raum seien eine Ellipse und zwei windschiefe Geraden in folgender Lage gegeben: Die Geraden sind je parallel zu einer Ellipsenachse und schneiden beide das Lot zur Ebene der Ellipse im Mittelpunkt der letzteren. Man betrachtet die Regelfläche, deren Erzeugenden diejenigen Geraden sind, welche gleichzeitig alle drei gegebenen Kurven schneiden (Randstrahlen eines paraxialen Bündels bei einer astigmatischen Linse). Was für Kurven sind die ebenen Schnitte parallel zur Ellipsenebene? Man beweise, daß sich darunter immer zwei Kreise befinden, und berechne deren Lage und Radien. W. PROKOP (Winterthur).

100. Im Dreieck $0 < x \leqq p$, $-\gamma\,x \leqq y \leqq \gamma\,x$ $(\gamma > 0)$ sei $f(x, y)$ derart definiert, daß für jedes Punktepaar (x, Y) und (x, y) in diesem Dreieck

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqq \vartheta\,\frac{M(|Y - y|)}{M(x)}$$

ist, wo $M(x) = x \ln \alpha/x$. $\vartheta < 1$ und α sind positive Konstanten. Dann besitzt die

Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ im Intervall $o < x \leqq p$ höchstens eine Lösung, die $\geqq -\gamma x$ und $\leqq \gamma x$ ist. J. G. VAN DER CORPUT (Amsterdam).

101. In einer Rätselzeitung[1]) wird behauptet, folgendes Problem habe nur eine Lösung: In einer Gesellschaft von Knaben und Mädchen, die mehr als 10 Kinder umfaßt, werden Lose verteilt, welche genau zwei Gewinne enthalten. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Gewinne auf zwei Mädchen fallen, beträgt 1/10. Wie viele Knaben und Mädchen sind in der Gesellschaft?

Ist die Behauptung richtig, und welcher Art ist das Problem?

A. SPEISER (Basel).

102. *a*) Démontrer que si x, y, z sont des nombres rationnels (naturels), le nombre $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ est rationnel dans ce et seulement dans ce cas, où chacun des nombres x, y, z est un carré d'un nombre rationnel (naturel).

b) Démontrer que si les nombres x et y sont naturels et $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ est un nombre rationnel, alors x et y sont des cubes de nombres naturels.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

103. Démontrer que les équations suivantes ont une infinité de solutions en nombres naturels distincts x, y, z:

a) $x^n + y^n = z^{n-1}$ (n naturel > 1), *b*) $x^n + y^n = z^{n+1}$ (n naturel), *c*) $x^3 + y^3 = z^5$.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

104. Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre. Trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures[2]). (Ce minimum est différent suivant que c'est le cercle ou le carré qui varie, l'autre figure restant fixe.)

L. KOLLROS (Zurich).

105. Costruire una conica conoscendone due punti e il cerchio di curvatura in un vertice (non dato). A. LONGHI (Lugano).

Literaturüberschau

ALOIS SCHMID: *Differential- und Integralrechnung*

149 Seiten, Verlag AG. Gebr. Leemann & Co., Zürich

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, eine Einführung in Wesen und Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für Naturwissenschaft und Technik zu geben. Er hat diese Aufgabe in den selbst gesteckten Grenzen wirklich gelöst. Der Akzent des Buches liegt auf der Einführung der grundlegenden Begriffe, weniger auf der Entwicklung der Technik des Kalküls. Es werden nur Funktionen einer Veränderlichen behandelt; unendliche Reihen fehlen ganz.

An konkreten Beispielen wird der Funktionsbegriff dargelegt und daran werden Ausführungen über graphische Darstellungen und einige Grundbegriffe der analytischen Geometrie angeschlossen. Es folgt sodann die Einführung des Differentialquotienten und des unbestimmten und bestimmten Integrals. Man kann sagen, daß diese wichtigsten Stellen des Buches sowohl didaktisch geschickt sind, wie auch allen billigen Forderungen wissenschaftlicher Strenge genügen. Das Buch ist ja nicht für den Mathematiker vom Fach geschrieben, sondern wendet sich an einen breiteren Leserkreis. Deshalb ist der – übrigens geschickten – Verwendung der geometrischen Anschauung bei der Definition von Differentialquotient und Integral zuzustimmen.

[1]) Settimana enigmistica, Nr. 956.
[2]) 4 Segmente + 4 «Ecken».