

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 5

Rubrik: Bericht

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sei nun $n = qs > 4$ eine zusammengesetzte Zahl, wobei q den kleinsten eigentlichen Teiler von n bezeichnet. Dann enthält D_2 keinen oder nur einen Gitterpunkt – nämlich $(n/2, 1)$ – an seinem Rande (abgesehen von den Eckpunkten), je nachdem $q > 2$ oder $q = 2$ ist. Dagegen hat D_s den Gitterpunkt $(q, 1)$ bzw. noch die weiteren Gitterpunkte $(2, 1), (4, 2), \dots, (n-2, n/2-1)$ an seinem Rande (entsprechend den beiden Fällen), woraus nach (1) folgt, daß D_2 in jedem Falle eine größere Anzahl von Gitterpunkten als D_s im Innern enthält. Damit ist der Satz bewiesen. P. MEDGYESSY, Debrecen.

Bericht

Zur Graeffeschen Methode für die Auflösung algebraischer Gleichungen

(Zusammenfassung eines Vortrages von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI
im Mathematischen Kolloquium Winterthur am 13. Februar 1950)

Die Koeffizienten a_k in der Gleichung

$$f_0(z) \equiv a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

sind symmetrische Funktionen der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ der Gleichung. Eine Grundidee des Verfahrens von GRAEFFE ist, diese Symmetrie zu zerstören, indem Ausdrücke (Funktionen der Koeffizienten) konstruiert werden, für deren Wert wesentlich nur noch eine Wurzel maßgebend ist. GRAEFFE verwendet dazu die «Transformierten» der Gleichung (1), d. h. Gleichungen, deren Lösung die zweiten, vierten, achten usw. Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Es sind dies:

$$f_k(z) \equiv a_n^{2k} \prod_{\nu=1}^n (z - \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \dots + a_n^{(k)} z^n = 0. \quad (k = 2, 4, 8, 16, \dots)$$

Das Polynom $f_{2k}(z)$ kann berechnet werden, indem man das Produkt

$$(-1)^n f_k(z) f_k(-z) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^n (z - \zeta_\nu^{2k}) \prod_{\nu=1}^n (z + \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^n (z^2 - \zeta_\nu^{4k})$$

bildet und darin z^2 durch z ersetzt.

Denkt man sich die Wurzeln der Gleichung (1) so numeriert, daß $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_n|$, und gilt für ein bestimmtes m : $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$, so folgt aus den Beziehungen von VIETA:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)} (\zeta_{m+1} \zeta_{m+2} \dots \zeta_n)^{-2k} = (-1)^{m-n} a_n^{(k)}. \tag{2}$$

Gilt sogar

$$|\zeta_{m-1}| < |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|, \tag{3}$$

so ergibt sich aus (2):

$$\zeta_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{-\frac{a_{m-1}^{(k)}}{a_m^{(k)}}},$$

woraus theoretisch ζ_m berechnet werden kann. Diese Formel gilt aber nur unter der Voraussetzung (3), und die Werte von m , welche diese Bedingung erfüllen, sind nicht zum vornherein bekannt. GRAEFFE glaubte, die Schwierigkeit mit der folgenden Überlegung überwinden zu können: Führt man die Berechnungen mit einer festen Zahl von bedeutsamen Ziffern durch und ergibt sich bei dieser Genauigkeit für alle $k > k_0$ Übereinstimmung der Zahlen $a_m^{(2k)}$ und $[a_m^{(k)}]^2$, so ist $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$. Leider ist das

insofern eine Täuschung, als die Rundungsfehler so groß werden können, daß sie diese Entscheidung nicht mehr erlauben. Transformiert man etwa die Gleichung

$$f_0(z) \equiv z^4 - 4z^3 + 5,999951z^2 - 4z + 1 = 0 \quad (4)$$

und rechnet dabei mit vier Dezimalen, so enthalten die Koeffizienten der dritten Transformierten bereits Fehler von $2^0/0$, die der vierten solche von $35^0/0$ und in der fünften wachsen die Fehler auf über $500^0/0$ an!

Es ist dann allerdings auf anderem Weg (mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln und durch Einführung des sogenannten Newtonschen Diagramms) gelungen, die Methode von GRAEFFE in dieser Beziehung zu vervollständigen. Auf Einzelheiten kann im Rahmen dieses Berichtes nicht eingegangen werden. Der Leser sei dafür auf die Arbeit von A. OSTROWSKI, *Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent* (Acta math. 72, 99 [1940]) verwiesen.

Die Gleichung (4) zeigt übrigens sehr schön, daß — obwohl natürlich die Wurzeln stetig von den Koeffizienten abhängen — eine geringe Änderung der letzteren einen beträchtlichen Einfluß auf die Wurzeln haben kann. Die Gleichung läßt sich nämlich elementar lösen, indem sich die linke Seite als Differenz zweier Quadrate schreiben läßt. Die Wurzeln sind:

$$z_1 \approx 1,0872; \quad z_2 \approx 0,9198; \quad z_{3,4} \approx 0,9965 \pm 0,0836 i.$$

Rundet man aber den mittleren Koeffizienten auf 6, so erhält man die Gleichung $(z-1)^4 = 0$, deren Wurzel $z=1$ gegenüber den obigen genaueren Werten Fehler (bezüglich Betrag) von $1^0/00$ bis $87^0/00$ aufweist, obwohl der Rundungsfehler beim Koeffizienten nur rund $0,01^0/00$ beträgt!

Der Referent wies im Anschluß an diese Feststellungen noch darauf hin, daß die unvermeidlichen Rundungsfehler auch der Verwendung der modernen Riesenrechenmaschinen eine Grenze setzen.

W. PROKOP.

Aufgaben

Aufgabe 70. Let x_1, x_2, \dots, x_n be any n real numbers and let be

$$E_n = \frac{\left(\sum_{r=1}^n |x_r| \right)^{n(n-1)/2}}{\prod_{r < s} |x_r - x_s|}.$$

Prove that the minimum values of E_n are 4 when $n=3$, and 256 when $n=4$.

L. J. MORDELL (Cambridge [England]).

Lösung: Wir dürfen $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$ voraussetzen.

1. Um das Minimum von $E_3(x_1, x_2, x_3)$ zu bestimmen, zeigen wir zunächst, daß $E_3(x_1 - x_2, 0, x_3 - x_2) \leq E_3(x_1, x_2, x_3)$. Der Nenner bleibt offensichtlich unverändert, und für den Zähler erhält man

$$(|x_1 - x_2| + |x_3 - x_2|)^3 = (x_1 - x_3)^3 \leq (|x_1| + |x_3|)^3 < (|x_1| + |x_2| + |x_3|)^3,$$

wenn $x_2 \neq 0$. Soll E_3 nicht mehr verkleinert werden können, so muß also $x_2 = 0$ sein und damit $x_1 > 0, x_3 < 0$. Hieraus folgt

$$E_3 = \frac{(|x_1| + |x_3|)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^2}{x_1(-x_3)} = \frac{(x_1 + x_3)^2}{x_1(-x_3)} + 4 \geq 0.$$

Der minimale Wert von E_3 ist also 4.