**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 5 (1950)
**Heft:** 5

**Artikel:** Die Tensorkoordinaten des Drehwinkels
**Autor:** Landolt, M.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-14912

auch hier wieder liebe Kameraden die Arbeit erleichterten. Manch neue Lebensfreundschaft wurde in dieser Zeit geschlossen.

Noch eines zweiten Verlustes, der mich tief traf, muß ich gedenken: der Verkauf meines lieben Landhauses in Langenbruck im Jahre 1942. Mit keiner andern Landschaft ist mein Innerstes so verbunden wie mit den Weiden und Höhen des Basler Juras. Was da alles mitspielt, ist schwer zu sagen: tiefe Jugend- und Männererinnerungen. So schön auch der Ersatz im Seeschlößli in Brunnen geworden ist, immer zieht mich mein Sinnen und Sehnen nach den unvergleichlichen Höhenwegen im Jura mit seinen Weiden und seinem Dufte.

In dem letzten Jahrzehnt habe ich auch die alte musikalische Tradition wieder aufgenommen und ein Quartett gegründet, das mir die schönste und liebste Abenderholung ist. Allen meinen lieben Quartettfreunden sage ich herzlichsten Dank für all die Stunden, in denen wir zusammen musizieren durften. Sie waren von den schönsten meines Lebensabends.

Meine 1931 kurz niedergeschriebenen Grundsätze sind in keiner Weise verändert worden. Wenn ich noch etwas hinzufügen soll, so ist es vielleicht dies: Es gibt nichts Vergängliches. Alles, was einmal gewesen ist, wird für alle Zeiten existiert haben. Daß wir nur zeitlich erleben und denken können, liegt an unserer Unvollkommenheit. Die ganze Entwicklung ist *ein* Geschehen, von dem die Zeit nur eine Dimension ist. In Wirklichkeit ist alles einmal Existierende ewig existierend. Dies gibt uns die große Beruhigung, daß alles das wenige, was wir Gutes und Erfreuliches machen durften, für alle Zeiten ist.

Brunnen, den 15. April 1946 RUDOLF FUETER

# Die Tensorkoordinaten des Drehwinkels

## 1. *Einleitung*

Den Zusammenhang des Radius $r$ mit dem Bogen $s$ und dem Drehwinkel $\varphi$ einerseits und mit dem Bogenelement $ds$ und dem Zuwachs $d\varphi$ des Drehwinkels anderseits geben die bekannten Formeln:

$$s = r\,\varphi, \tag{1}$$

$$ds = r\,d\varphi. \tag{2}$$

Den Radius und das Bogenelement kann man als gerichtete Strecken, also als Vektoren auffassen. Diese beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Der Zuwachs des Drehwinkels kann dann aber kein Skalar sein; er ist vielmehr ein Tensor zweiter Stufe. Auch der Drehwinkel erweist sich, wenn auch nicht in (1), als ein Tensor zweiter Stufe.

Nachstehend sollen derartige Zusammenhänge dargelegt werden. Wir stellen uns insbesondere die Aufgabe, die Koordinaten $\varphi_{ik}$ jenes Tensors zu ermitteln, der den Vektor $\vec{a}$ mit den kontravarianten Koordinaten[1]) $a^k$ in den gleich langen Vektor $\vec{b}$ mit

[1]) Wir unterscheiden in Anlehnung an DUSCHEK und HOCHRAINER ([3], S. 6) die Koordinaten eines Vektors von dessen Komponenten, die selbst Vektoren sind.

den kovarianten Koordinaten $b_i$ dreht. Dabei soll diese Drehung um eine durch den Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ gehende, sonst beliebige Achse, die durch den Vektor $\vec{z}$ gegeben ist, und um den Winkel $\varphi$ erfolgen. Wir setzen dabei ein geradlinig-schiefwinkliges Koordinatensystem voraus. Unser Ansatz lautet:

$$b_i = \varphi_{ik}\, a^k \text{ [1]}. \tag{3}$$

## 2. *Volumen eines Spats und Eckensinus*

Da die für ein geradlinig-schiefwinkliges Koordinatensystem geltende Formel für das Volumen eines Spats nachher benötigt wird, soll sie hier hergeleitet werden.

Unter dem Längenvektor $\vec{a}$ verstehen wir das Produkt aus der Länge (Koordinate) $a$ und dem dimensionslosen Einheitsvektor $\vec{1}_a$:

$$\vec{a} = a\, \vec{1}_a. \tag{4}$$

Die Länge $a$ ist ihrerseits das Produkt aus der Maßzahl $\alpha$ und der Längeneinheit $e_a$. Schlägt man letztere zum dimensionslosen Einheitsvektor $\vec{1}_a$, so erhält man den Längeneinheitsvektor $\vec{e}_a$. Es gilt somit:

$$\vec{a} = a\, \vec{1}_a = \alpha\, e_a\, \vec{1}_a = \alpha\, \vec{e}_a. \tag{5}$$

Nun mögen die drei Längenvektoren $\vec{a} = a\,\vec{1}_a$, $\vec{b} = b\,\vec{1}_b$, $\vec{c} = c\,\vec{1}_c$, die nicht aufeinander senkrecht stehen, vom Koordinatennullpunkt aus einen Spat aufspannen. Dessen Volumen ist bekanntlich

$$V = (\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{c} = a\, b\, c\, (\vec{1}_a \times \vec{1}_b)\, \vec{1}_c. \tag{6}$$

Hier bedeuten $(\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{c}$ und $(\vec{1}_a \times \vec{1}_b)\, \vec{1}_c$ gemischte Produkte von Vektoren, nämlich das skalare Produkt aus dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ bzw. $\vec{1}_a \times \vec{1}_b$ und dem Vektor $\vec{c}$ bzw. $\vec{1}_c$. Es ist somit:

$$(\vec{1}_a \times \vec{1}_b)\, \vec{1}_c = \sin(\vec{1}_a, \vec{1}_b) \cos\big((\vec{1}_a \times \vec{1}_b), \vec{1}_c\big). \tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist bekannt unter dem Namen *Eckensinus* [2]. Wir setzen abkürzend:

$$\boxed{(\vec{1}_a \times \vec{1}_b)\, \vec{1}_c = s_{abc}}\,. \tag{8}$$

---

[1]) Wir lassen, wie das in der Tensorrechnung üblich ist, das Summenzeichen weg, indem vereinbart ist, daß ein in einem Term zweimal, einmal oben und einmal unten, auftretender Index als Laufindex betrachtet wird, über den zu summieren ist. — In ausführlicher Schreibweise wäre statt (3) zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \varphi_{11}\, a^1 + \varphi_{12}\, a^2 + \varphi_{13}\, a^3 \\ b_2 &= \varphi_{21}\, a^1 + \varphi_{22}\, a^2 + \varphi_{23}\, a^3 \\ b_3 &= \varphi_{31}\, a^1 + \varphi_{32}\, a^2 + \varphi_{33}\, a^3 \end{aligned}\right\}. \tag{3a}$$

[2]) VON STAUDT ([8], S. 255) definiert den Sinus eines Dreikants (einer dreiseitigen Raumecke) als das Produkt aus dem Sinus des von zwei Kanten eingeschlossenen Winkels in den Sinus desjenigen Winkels, welchen die dritte Kante mit der Ebene des ersteren bildet. — Dieses Produkt ist identisch mit dem gemischten Produkt der drei dimensionslosen Einheitsvektoren, wenn man für die Vorzeichen passende Annahmen macht.

Entsprechend dem Vorzeichenwechsel, den das gemischte Produkt von drei Vektoren erfährt, wenn die Faktoren die Reihenfolge tauschen, wird

$$s_{abc} = -s_{acb} = s_{bca} = -s_{bac} = s_{cab} = -s_{cba}. \tag{9}$$

Fallen zwei oder alle drei Einheitsvektoren in dieselbe Richtung, stimmen also zwei oder alle drei Indizes überein, so wird das gemischte Produkt und damit der Eckensinus Null.

Mit Hilfe des Eckensinus (8) geht das Spatvolumen von (6) über in

$$V = a\,b\,c\,s_{abc}. \tag{10}$$

Nun führen wir mit dem bereits erwähnten Nullpunkt ein geradlinig-schiefwinkliges Koordinatensystem ein. Für die drei gegebenen Längenvektoren gilt dann

$$\vec{a} = a^i\,\vec{1}_i, \quad \vec{b} = b^j\,\vec{1}_j, \quad \vec{c} = c^k\,\vec{1}_k, \tag{11}$$

und man erhält für das Spatvolumen die gesuchte Formel:

$$\boxed{V = (\vec{a}\times\vec{b})\,\vec{c} = a^i\,b^j\,c^k\,(\vec{1}_i\times\vec{1}_j)\,\vec{1}_k = a^i\,b^j\,c^k\,s_{ijk}}\,. \tag{12}$$

Rechts außen steht eine Summe von 27 Gliedern; es sind aber nur sechs Glieder von Null verschieden.

### 3. *Rechtwinklige Drehung eines Vektors um eine zu ihm senkrecht stehende Achse*

Wir suchen als ersten Schritt zur Lösung der in der Einleitung gestellten Aufgabe die Komponenten $j_{ik}$ jenes Tensors, der einen gegebenen Vektor $\vec{x}$ um eine zu ihm senkrecht stehende Achse, die durch den koinitialen Vektor $\vec{z}$ gegeben ist, um einen rechten Winkel dreht, so daß der Vektor $\vec{y}$ entsteht. Die drei Längenvektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ bilden ein rechtwinkliges Rechtssystem. $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind gleich lang; es gilt also

$$x = y. \tag{13}$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die kovarianten Koordinaten $y_i$ von $\vec{y}$ zu ermitteln. Die $y_i$ sind dabei jene Längen, die man auf den Koordinatenachsen abschneidet, wenn man $\vec{y}$ rechtwinklig darauf projiziert. Setzen wir

$$c_{ik} = \cos(\vec{1}_i, \vec{1}_k), \tag{14}$$

so gilt allgemein

$$a_i = c_{ik}\,a^k\,{}^{1)}. \tag{15}$$

Löst man die Gleichungen (15) nach den $a^k$ auf, so erhält man die Koeffizienten $c^{ki}$, mit welchen man nach

$$y^k = c^{ki}\,y_i \tag{16}$$

die $y^k$ aus den $y_i$ ermitteln kann.

[1]) Rechnet man nicht mit den Längen $a_i$ und $a^k$, sondern mit den Maßzahlen $\alpha_i$ und $\alpha^k$, so treten an die Stelle der $c_{ik}$ die Koordinaten $g_{ik}$ des metrischen Fundamentaltensors.

Da $\vec{y}$ auf $\vec{x}$ und auf $\vec{z}$ senkrecht steht, gilt für das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Quaders:

$$V = x\,y\,z = y^2 z = y^i y_i z. \tag{17}$$

Anderseits findet man aber nach (12) und (9) auch

$$V = x^k y^i z^j s_{kij} = x^k y^i z^j s_{ijk}. \tag{18}$$

Hieraus erhält man durch Vergleichen mit (17):

$$y_i z = x^k z^j s_{ijk} \quad \text{oder} \quad y_i = s_{ijk} \frac{z^j}{z} x^k. \tag{19a und b}$$

Mit dem Ansatz

$$\boxed{y_i = j_{ik} x^k} \tag{20}$$

folgt aus (19b)

$$\boxed{j_{ik} = s_{ijk} \frac{z^j}{z}}\,. \tag{21}$$

Hieraus errechnet man folgende Werte:

$$j_{ik} = \begin{array}{cc|c|c|c} & & & k = & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -s_{123}\frac{z^3}{z} & s_{123}\frac{z^2}{z} \\ \hline i = & 2 & s_{123}\frac{z^3}{z} & 0 & -s_{123}\frac{z^1}{z} \\ \hline & 3 & -s_{123}\frac{z^2}{z} & s_{123}\frac{z^1}{z} & 0 \end{array} \tag{22}$$

Unsere erste Teilaufgabe ist damit gelöst. -- Der Tensor der rechtwinkligen Drehung ist schiefsymmetrisch.

## 4. *Beliebige Drehung eines Vektors um eine zu ihm senkrecht stehende Achse*

Der Vektor $\vec{x}$ werde um die zu ihm senkrechte, durch $\vec{z}$ gegebene Achse um den Winkel $\varphi$ gedreht, so daß der Vektor $\vec{r}$ entsteht. Wir zerlegen $\vec{r}$ parallel und senkrecht zu $\vec{x}$. Dementsprechend ergeben sich die kovarianten Koordinaten von $\vec{r}$ als Summe:

$$r_i = x_i \cos\varphi + j_{ik} x^k \sin\varphi. \tag{23}$$

Dabei kann man die kovarianten Koordinaten $x_i$ nach (15) durch die kontravarianten Koordinaten $x^k$ des Vektors $\vec{x}$ ausdrücken:

$$x_i = c_{ik} x^k. \tag{24}$$

Somit erhalten wir

$$r_i = (c_{ik} \cos\varphi + j_{ik} \sin\varphi)\, x^k. \tag{25}$$

Machen wir noch den Ansatz

$$\boxed{r_i = \varphi'_{ik}\, x^k}\,, \tag{26}$$

so finden wir als Ergebnis die folgenden Koordinaten des den Vektor $\vec{x}$ um den Winkel $\varphi$ drehenden Tensors:

$$\boxed{\varphi'_{ik} = c_{ik} \cos\varphi + j_{ik} \sin\varphi\ ^{1)}}\,. \tag{27}$$

### 5. *Drehung eines Vektors um eine zu ihm schief stehende Achse*

Der Vektor $\vec{a}$ werde um die zu ihm schief stehende, durch den Vektor $\vec{z}$ gegebene Achse um den Winkel $\varphi$ gedreht, so daß der Vektor $\vec{b}$ entsteht. Wir ermitteln die Koordinaten $\varphi_{ik}$ des Drehtensors, der die kontravarianten Koordinaten von $\vec{a}$ nach dem Ansatz

$$b_i = \varphi_{ik}\, a^k \tag{28}$$

in die kovarianten Koordinaten von $\vec{b}$ überführt.

Die in die Achse fallende Komponente von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

$$a \cos(\vec{a}, \vec{z})\, \frac{\vec{z}}{z} = a\, \frac{(\vec{a}\,\vec{z})}{a\, z} \cdot \frac{\vec{z}}{z} = \frac{(\vec{a}\,\vec{z})}{z^2}\, \vec{z} = \frac{a^h z_h}{z^2}\, \vec{z}. \tag{29}$$

Dabei ist $(\vec{a}\,\vec{z})$ das skalare Produkt von $\vec{a}$ und $\vec{z}$, also $a z \cos(\vec{a}, \vec{z})$ oder $a^h z_h$. Für die gegebenen Vektoren gilt dann

$$\vec{a} = \frac{a^h z_h}{z^2}\, \vec{z} + \vec{x}, \qquad \vec{b} = \frac{a^h z_h}{z^2}\, \vec{z} + \vec{r}\,. \tag{29a und b}$$

Für die kovarianten Koordinaten von $\vec{b}$ findet man nach (29b) unter Beachtung von (26) und mit Ersatz des Index $h$ durch $k$

$$b_i = \frac{a^h z_h}{z^2}\, z_i + r_i = \frac{z_i z_k}{z^2}\, a^k + \varphi'_{ik}\, x^k. \tag{30}$$

Aus (29a) folgt

$$x^k = a^k - \frac{a^h z_h}{z^2}\, z^k. \tag{31}$$

(30) geht damit über in

$$b_i = \frac{z_i z_k}{z^2}\, a^k + \varphi'_{ik}\, a^k - \varphi'_{ik}\, \frac{a^h z_h}{z^2}\, z^k. \tag{32}$$

Das in (32) im rechts außen stehenden Glied auftretende Produkt $\varphi'_{ik} z^k$ läßt sich mit Verwendung von (27) wie folgt umformen, indem man (15) auf $z^k$ anwendet und

---

[1]) Man beachte die Analogie mit dem für komplexe Zahlen geltenden Ausdruck

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi. \tag{27 a}$$

Wir schreiben, in Übereinstimmung mit den Elektrotechnikern, $j$ für die imaginäre Einheit.

indem man beachtet, daß sich wegen (9) stets zwei Glieder $s_{ijk} z^j z^k$ zu Null ergänzen:

$$\varphi'_{ik} z^k = c_{ik} \cos\varphi\, z^k + s_{ijk} \frac{z^j}{z} \sin\varphi\, z^k = \cos\varphi\, z_i + \sin\varphi \cdot 0 = \cos\varphi\, z_i. \tag{33}$$

Damit wird, wenn man schließlich noch in $a^h z_h$ den Index $h$ durch $k$ ersetzt,

$$b_i = \left[\frac{z_i z_k}{z^2}(1-\cos\varphi) + \varphi'_{ik}\right] a^k. \tag{34}$$

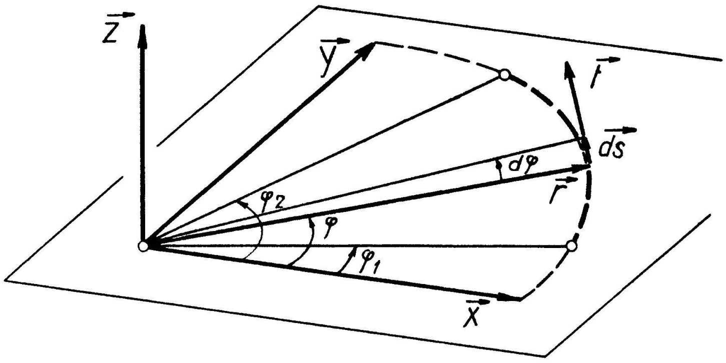


Fig. 1

Durch Vergleichen mit (28) findet man schließlich

$$\varphi_{ik} = \frac{z_i z_k}{z^2}(1-\cos\varphi) + \varphi'_{ik}, \tag{35a}$$

oder:

$$\boxed{\varphi_{ik} = \frac{z_i z_k}{z^2}(1-\cos\varphi) + c_{ik}\cos\varphi + j_{ik}\sin\varphi}\,. \tag{35b}$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst; die Koordinaten $\varphi_{ik}$ des Drehtensors kann man nach (35b), (22) und (8) berechnen. Die verschiedenen Summanden von $\vec{b}$, die den verschiedenen Gliedern der $\varphi_{ik}$ entsprechen, lassen sich leicht geometrisch deuten[1]).

Den für rechtwinklige Koordinatenachsen geltenden Spezialfall des Ausdrucks (35b) haben, in etwas anderer Schreibweise, DUSCHEK und HOCHRAINER ([3], S. 78) bekanntgegeben.

## 6. *Das Bogenelement und der Bogen*

Wir wollen zuerst das Bogenelement durch den Radius ausdrücken. Das gerichtete Bogenelement $\vec{ds}$ (Fig. 1) ist das Differential $\vec{dr}$ des Vektors $\vec{r}$. Der Bogen $s$ und sein Differential $ds$ sind Skalare. An die Stelle von (2) tritt nun der Ansatz

$$dr_i = d\varphi_{ik}\, r^k. \tag{36}$$

Die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{dr}$ und $\vec{z}$ stehen je senkrecht aufeinander. Wir haben daher $d\varphi_{ik}$

[1]) Rechnet man mit den Maßzahlen $\beta_i$, $\alpha^k$, $\zeta_i$, $\zeta_k$ und $\zeta$ statt mit den Längen (= Größen) $b_i$, $a^k$, $z_i$, $z_k$ und $z$, so treten die $g_{ik}$ an die Stelle der $c_{ik}$.

nach (27) zu ermitteln und erhalten

$$d\varphi_{ik} = j_{ik}\, d\varphi. \tag{37}$$

Damit wird

$$dr_i = j_{ik}\, r^k\, d\varphi. \tag{38}$$

Zur Illustration diene folgender Spezialfall: Das Koordinatensystem sei rechtwinklig; $\vec{dr}$ und $\vec{r}$ liegen in der durch die Achsen 1 und 2 aufgespannten Ebene, so daß $\vec{z}$ in die Achse 3 fällt. Damit wird in (22) der Eckensinus 1, ferner verschwinden die Koordinaten $z^1$ und $z^2$, schließlich ist die Koordinate $z^3$ gleich der Länge $z$:

$$j_{ik} = \begin{array}{cc|ccc} & & & k = & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \\ i = & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{39}$$

Die $dr_i$ werden nun besonders einfach.

Zur ursprünglichen Aufgabe zurückkehrend, verstehen wir unter dem Bogen $s$ das von $\varphi_1$ bis $\varphi_2$ erstreckte Wegintegral des skalaren Produkts des dimensionslosen Einheitstangentenvektors $\vec{t}$ und des Differentials $\vec{dr}$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} t^i\, dr_i. \tag{40}$$

Die in (38) auftretenden Faktoren $j_{ik} r^k$ stellen nach (20) die kovarianten Koordinaten eines zu $\vec{r}$ senkrecht stehenden Längenvektors dar, der auch auf $\vec{z}$ senkrecht steht. In der Reihenfolge $\vec{r}$, neuer Längenvektor, $\vec{z}$ bilden die drei Vektoren ein rechtwinkliges, rechtshändiges Dreibein. Der neue Vektor hat demnach die Richtung des dimensionslosen Einheitstangentenvektors $\vec{t}$, und er ist gleich lang wie $\vec{r}$. Es ist also

$$j_{ik}\, r^k = t_i\, r. \tag{41}$$

Damit geht (38) über in

$$dr_i = t_i\, r\, d\varphi, \tag{42}$$

und aus (40) wird

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} t^i\, t_i\, r\, d\varphi. \tag{43}$$

Unter dem Integral steht nun das skalare Produkt des Einheitstangentenvektors mit sich selbst; es hat den Wert 1:

$$t^i\, t_i = 1. \tag{44}$$

Damit wird schließlich der Bogen

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\, d\varphi = r\,(\varphi_2 - \varphi_1) = r\,\varphi_{12}. \tag{45}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man die $dr_i$ nicht durch die $r^k$, sondern durch die $x^k$ ausdrückt. Man hat dann allerdings etwas mehr Umformungen vorzunehmen.

## 7. *Nochmals die rechtwinklige Drehung eines Vektors um eine zu ihm senkrecht stehende Achse*

In einer zum Vektor $\vec{z}$ senkrecht stehenden und durch dessen Fußpunkt gehenden Ebene liegen koinitial die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, und $\vec{w}$, und zwar so, daß, von der Spitze von

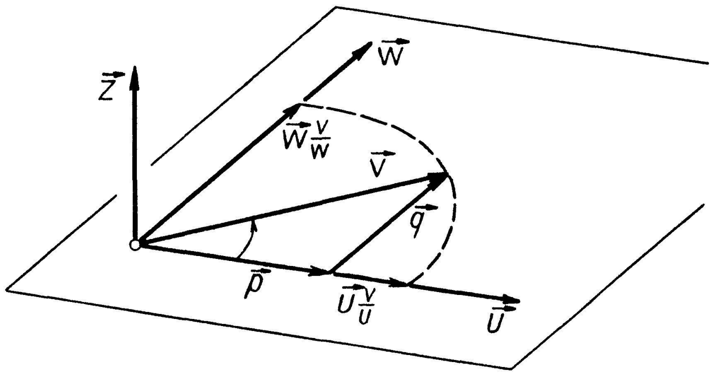


Fig. 2

$\vec{z}$ aus gesehen, $\vec{v}$ um den Winkel $(\vec{u}, \vec{v})$ und $\vec{w}$ um einen rechten Winkel gegenüber $\vec{u}$ im Gegenuhrzeigersinn verdreht sind (Fig. 2). $\vec{u}$ und $\vec{w}$ sollen gleich lang sein:

$$u = w. \tag{46}$$

Nun wird $\vec{v}$ parallel zu $\vec{u}$ und $\vec{w}$ in die rechtwinkligen Komponenten $\vec{p}$ und $\vec{q}$ zerlegt. Wir können zu einem neuen Ausdruck für die Koordinaten $j_{ik}$ des Tensors der rechtwinkligen Drehung kommen, indem wir die kontravarianten Koordinaten von $\vec{q}$ auf zwei verschiedene Arten durch die kontravarianten Koordinaten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ausdrücken.

Einerseits gilt

$$\vec{q} = -\vec{p} + \vec{v}, \tag{47}$$

woraus

$$q_i = -p_i + v_i = -u_i \frac{v}{u} \cos(\vec{u}, \vec{v}) + v_i \tag{48}$$

folgt. Aus dem skalaren Produkt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ folgt

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{u^k v_k}{u\, v}. \tag{49}$$

Somit wird

$$q_i = -\frac{u_i u^k v_k}{u^2} + v_i. \tag{50}$$

Da das skalare Produkt von $\vec{u}$ mit sich selbst

$$u^k u_k = u^2 \tag{51}$$

liefert, wird auch

$$q_i = -\frac{u_i u^k v_k}{u^2} + \frac{v_i u^k u_k}{u^2} = \frac{-u_i v_k + v_i u_k}{u^2} u^k. \tag{52}$$

Anderseits gilt

$$\vec{q} = \vec{w}\frac{v}{w}\sin(\vec{u},\vec{v}) = \vec{w}\frac{v}{u}\sin(\vec{u},\vec{v}), \tag{53}$$

woraus

$$q_i = w_i \frac{v}{u}\sin(\vec{u},\vec{v}) \tag{54}$$

folgt. Ersetzt man $w_i$ nach (20) durch $j_{ik}$ und $u^k$, so erhält man

$$q_i = j_{ik} u^k \frac{v}{u}\sin(\vec{u},\vec{v}). \tag{55}$$

Durch Vergleichen von (52) und (55) findet man schließlich

$$-u_i v_k + v_i u_k = j_{ik} u v \sin(\vec{u},\vec{v}), \tag{56}$$

oder:

$$\boxed{j_{ik} = \frac{-u_i v_k + v_i u_k}{u v \sin(\vec{u},\vec{v})}}\,. \tag{57}$$

Zerlegt man einen beliebig gelegenen Vektor $\vec{a}$ in zwei rechtwinklige Komponenten, so daß die eine in den Vektor $\vec{z}$ und die andere in die durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Ebene fällt, so läßt sich leicht zeigen, daß der Tensor der rechtwinkligen Drehung lediglich die letztere Komponente um einen rechten Winkel dreht, die andere Komponente dagegen nicht beeinflußt.

## 8. *Das äußere Produkt zweier Vektoren*

In der Vektorrechnung schreibt man für das äußere Produkt der beiden Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}. \tag{58}$$

Dabei gilt für den skalaren Anteil

$$C = AB\sin(\vec{A},\vec{B}). \tag{59}$$

$\vec{C}$ deutet man in der Vektorrechnung als axialen Vektor. Tatsächlich ist das äußere Produkt von zwei Vektoren ein Tensor zweiter Stufe mit schiefsymmetrischen Koordinaten, der sich im dreidimensionalen Raum auf einen Vektor abbilden läßt. Wir ersetzen daher wie BRILLOUIN ([2], S. 215), WEYL ([10], S. 41) und andere die Vektorgleichung (58) durch

$$C_{ik} = -A_i B_k + B_i A_k. \tag{60}$$

Daraus erhalten wir nach (56)

$$C_{ik} = j_{ik} AB\sin(\vec{A},\vec{B}). \tag{61}$$

Unter Berücksichtigung von (59) wird dann

$$C_{ik} = \jmath_{ik}\, C. \tag{62}$$

Als Beispiel erwähnen wir das Drehmoment, das eine an der Spitze des Vektors $\vec{r}$ angreifende Kraft $\vec{F}$ erzeugt. Statt der (58) entsprechenden Vektorgleichung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{63}$$

setzen wir nach (60)

$$M_{ik} = -\, r_i F_k + F_i r_k. \tag{64}$$

Mit

$$M = r F \sin(\vec{r}, \vec{F}) \tag{65}$$

geht (64) über in

$$M_{ik} = \jmath_{ik}\, M. \tag{66}$$

Ganz analog kann man andere äußere Vektorprodukte und andere «axiale Vektoren» darstellen, so zum Beispiel die Fläche, die zwei Vektoren aufspannen, ferner die Winkelgeschwindigkeit, die magnetische Induktion.

### 9. *Verzeichnis der hauptsächlich benützten Literatur*

[1] L. Bouthillon, *Sur la nature des grandeurs électriques et magnétiques et l'application de la notation tensorielle aux lois de l'électricité*, Bull. Soc. franç. Electriciens *8*, 41 (1938).

[2] L. Brillouin, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité* (Masson & Cie, Paris 1946).

[3] A. Duschek und A. Hochrainer, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, I. Teil: *Tensoralgebra* (Springer, Wien 1946).

[4] G. Kron, *Tensor analysis of networks* (John Wiley & Sons, New York, 1939).

[5] A. Mineur, *Géométrie vectorielle*, I: *Algèbre vectorielle*, 4. Auflage (Albert Vanderlinden, Brüssel).

[6] H. Rothe, *Einführung in die Tensorrechnung* (L. W. Seidel & Sohn, Wien 1924).

[7] J. Schouten und D. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, 1. Band: *Algebra und Übertragungslehre*, 2. Auflage (P. Noordhoff N. V., Groningen und Batavia, 1935).

[8] G. von Staudt, *Über die Inhalte der Polygone und Polyeder*, J. reine angew. Math. *24*, 252 (1842).

[9] S. Stigant, *Modern electrical engineering mathematics* (Hutchinson's Scientific and Technical Publications, London 1946).

[10] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 5. Auflage (Springer, Berlin 1923).

M. Landolt, Winterthur.

---

# Kleine Mitteilungen

### I. *Eine Bemerkung zur Definition des geometrischen Ortes*

In einigen schweizerischen Lehrmitteln[1]) ist die folgende Definition des geometrischen Ortes gegeben: «Ein geometrischer Ort ist eine Linie, auf der alle Punkte liegen müssen (und keine andern), die eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen.» Daß diese Definition

[1]) F. Gonseth und P. Marti, *Planimetrie* I (Orell Füßli, Zürich). – H. Frick, *Planimetrie* (Schultheß, Zürich).