**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 5 (1950)
**Heft:** 4

**Rubrik:** Aufgaben

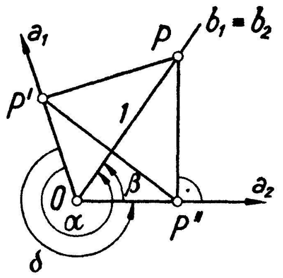


Fig. 2

$$\text{Maßzahl von}\left\{\begin{array}{l} PP' \\ PP'' \\ OP' \\ OP'' \\ P'P'' \end{array}\right\}\text{ ist }\left\{\begin{array}{l} |\sin\alpha| = -\sin\alpha \\ \sin\beta \\ \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \sin(\alpha - 180^\circ - \beta) = -\sin(\alpha - \beta) \end{array}\right.$$

$$1 \cdot [-\sin(\alpha - \beta)] = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

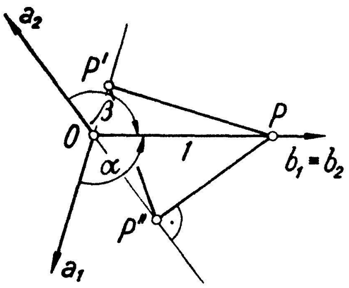


Fig. 3

$$\text{Maßzahl von}\left\{\begin{array}{l} PP' \\ PP'' \\ OP' \\ OP'' \\ P'P'' \end{array}\right\}\text{ ist }\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha \\ |\sin\beta| = -\sin\beta \\ |\cos\alpha| = -\cos\alpha \\ |\cos\beta| = -\cos\beta \\ \sin(360^\circ - \alpha + \beta) = -\sin(\alpha - \beta) \end{array}\right.$$

$$1 \cdot [-\sin(\alpha - \beta)] = \sin\alpha\,(-\cos\beta) + (-\cos\alpha)\,(-\sin\beta),$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

---

# Aufgaben

**Aufgabe 67.** Durch einen veränderlichen Punkt $P$ einer Parabel mit dem Scheitel $S$ ziehe man den Durchmesser, der die Scheiteltangente in $A$ schneidet. Man bestimme den geometrischen Ort des Fußpunktes des von $A$ aus $SP$ gefällten Lotes.

E. ROTHMUND (Zürich).

*1. Lösung:* Die Verlängerung des Lotes aus $A$ auf $SP$ schneide die Parabelachse in $Q$. Dann ist wegen $\overline{SQ}:\overline{SA} = \overline{SA}:\overline{AP}$ $\overline{SQ} = \overline{SA}^2/\overline{AP} =$ konstant. Der gesuchte geometrische Ort ist also ein Kreis über $SQ$ als Durchmesser. Da die Konstante gleich $2p$ ist ($p$ Parameter der Parabel), so ist der Kreis der Scheitelkrümmungskreis.

F. GOLDNER (London).

*2. Lösung:* Die Parabel mit dem Scheitel $S$ und der Scheiteltangente $s$ darf aufgefaßt werden als zentralkollineares Bild eines Kreises $\mathfrak{K}$, welcher $s$ in $S$ berührt; mit $S$ als Kollineationszentrum, $s$ als Kollineationsachse und der dazu parallelen Kreistangente $t$ in $T$ als Verschwindungslinie. Die Symmetriegerade durch die Berührungspunkte $S$ und $T$ wird dann Hauptachse der Bildparabel. Der Geraden $TKA$ durch den beliebigen Kreispunkt $K$ entspricht die zu $ST$ parallele Bildgerade $PA$ durch den zugeordneten Parabelpunkt $P$, und der Punkt $K$ hat offenbar gerade die in der Aufgabe geforderte Fußpunktseigenschaft. *Der gesuchte geometrische Ort ist somit der Kreis* $\mathfrak{K}$. Dieser Kreis ergibt sich auch als Grenzlage des Kreises, der $s$ in $S$ berührt und durch $P$ geht, wenn sich $P$ unbegrenzt $S$ nähert. Er ist also der Krümmungskreis in $S$.

P. GLUR (Bern).

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), I. HESSELBERG (Noestved, Dänemark), S. JOSS (Bern), L. KIEFER (Luxemburg), A. SCHWARZ (Seuzach) und A. STOLL (Zürich).

**Aufgabe 69.** Man beweise für ein Dreieck mit den Seiten $a, b, c$ und dem Flächeninhalt $F$ die Ungleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4F\sqrt{3}, \quad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geqq 16F^2.$$

F. GOLDNER (London).

*Lösung:* Es ist nach der Heronschen Formel

$$16F^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2c^2 - (a^2 - b^2)^2 - (c^2 - b^2)(c^2 - a^2)$$

und

$$48F^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - 4(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2 - 4(c^2 - b^2)(c^2 - a^2).$$

Die Elimination von $F$ gibt

$$3(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \left\{(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - b^2)(c^2 - a^2)\right\}.$$

Es ist daher, wenn wir unter $c$ die größte Seite verstehen,

$$48F^2 \leqq 3(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \leqq (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

wobei die Gleichheitszeichen nur für $a = b = c$ Geltung haben.

Wegen $(a^2 + b^2 + c^2) : 4F = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\omega \geqq \sqrt{3}$ ergibt sich die bekannte Ungleichung für den Brocardschen Punkt

$$\omega \leqq \frac{\pi}{6}.$$

R. LAUFFER (Graz).

A. BAGER (Hjørring, Dänemark) und P. GLUR (Bern) verwenden die Identitäten

$$48F^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2\,[(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - b^2)].$$

$$16F^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 0{,}5\,[(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - b^2)].$$

Weitere Lösungen sandten: H. BIERI (Bern), I. HESSELBERG (Noestved, Dänemark), S. JOSS (Bern), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich), B. SCHENKER (Fetan), A. SCHWARZ (Seuzach), A. STOLL (Zürich).

Die erste der beiden in der Aufgabe angegebenen Ungleichungen wurde zuerst von R. WEITZENBÖCK bewiesen (Math. Z. *5* [1919]).

## Neue Aufgaben

*95.* Man bestimme die Ellipse, die durch drei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis doppelt berührt. Liegen die drei Punkte im Innern des Kreises, so ist die Aufgabe bekanntlich leicht lösbar, indem man die Figur als Normalprojektion einer eben geschnittenen Kugel auffaßt. Verlangt ist eine rein planimetrisch begründete Konstruktion, die auch den Fall berücksichtigt, wo die drei Punkte außerhalb des Kreises liegen. W. LÜSSY (Winterthur).

*96.* Man zeige: Unter allen Rotationskörpern von der festen Länge $l > 0$ gibt es immer genau einen Kegel und einen Zylinder, welche in Oberfläche und Volumen übereinstimmen. Wie groß sind Oberfläche und Volumen dieses ausgezeichneten Körperpaares? H. BIERI (Bern).

*97.* Von einem Brennpunkt einer Ellipse geht ein Lichtstrahl aus und kehrt nach zweimaliger Reflexion an der Ellipse in diesen Punkt zurück. Man bestimme die Ausgangsrichtung so, daß der Lichtstrahl eine möglichst große Dreiecksfläche umschließt. H. LEHMANN (Bern).

*98.* Der Kreis $K$ liegt auf einem elliptischen Paraboloid mit vertikaler Achse. Man betrachte diejenigen auf dem Paraboloid liegenden Wurfparabeln, die $K$ berühren, und zeige, daß die Geschwindigkeit $v$ im Berührungspunkt für alle Punkte von $K$ dieselbe ist. R. LAUFFER (Graz).

---

# Literaturüberschau

*Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946*

Band 2, Reine Mathematik, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948

In der deutschen Ausgabe der *Fiat Review of German Science*, die die wissenschaftliche Arbeit Deutschlands während der Kriegszeit in gedrängtester Form zusammenfaßt, erstattet W. SÜSS mit 30 Mitarbeitern auf fast 800 Seiten Bericht über die Forschung in reiner Mathematik. Ein anderer Band ist der angewandten Mathematik gewidmet. Zum Teil sind auch ausländische Autoren zitiert, sofern sie während der Berichtszeit in deutschen Zeitschriften publiziert haben oder in Deutschland tätig waren. Auch unveröffentlichte Arbeiten wurden in großer Zahl aufgenommen.

Die Lektüre dieses Berichts ist außerordentlich anregend. Er wird nicht nur dazu beitragen, die Verbindung der deutschen mit der internationalen Wissenschaft wieder herzustellen, sondern auch jedem Leser neue mathematische Kenntnisse vermitteln.

Da es unmöglich ist, auf einzelne Arbeiten einzugehen, beschränken wir uns auf die Angabe der Kapitel und ihrer Bearbeiter. 1. Geschichte der Mathematik (J. E. HOFMANN); 2. Grundlagen der Mathematik (P. LORENZEN); 3. Elementarmathematik (M. ZACHARIAS); 4. Algebra und Zahlentheorie (H. HASSE); 5. Gruppentheorie (H. ZASSENHAUS); 6. Verbände (G. KÖTHE); 7. Allgemeine Mengen und reelle Funktionen (G. NÖBELING); 8. Unendliche Zahlenfolgen, Limitierungsverfahren (K. KNOPP); 9. Fastperiodische Funktionen (W. MAAK); 10. Spezielle Funktionen der mathematischen Physik (W. MAGNUS); 11. Reihenentwicklung der mathematischen Physik (J. LENSE); 12. Funktionentheorie (H. KNESER und E. ULLRICH); 13. Elliptische Modulfunktionen und automorphe Funktionen (H. PETERSSON); 14. Gewöhnliche Differentialgleichungen (M. MÜLLER); 15. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Pfaffsches Problem (H. BILHARZ); 16. Potentialtheorie (K. MARUHN); 17. Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung (M. PINL); 18. Spezielle Randwertaufgaben (H. BUCHHOLZ); 19. Variationsrechnung (H. BOERNER); 20. Integralgleichungen (G. TAUTZ); 21. Eigenwerttheorie (H. WIELANDT); 22. Funktionalanalysis, Integraltransformationen (G. KÖTHE); 23. Grundlagen der Geometrie (E. SPERNER); 24. Analytische und höhere Geometrie (W. SÜSS); 25. Algebraische Funktionenkörper und algebraische Geometrie (M. DEURING); 26. Differentialgeometrie (G. BOL); 26a. Projektive Relativitätstheorie und Kosmologie (P. JORDAN), 27. Theorie der geometrischen Ordnungen (O. HAUPT); 28. Konvexe Körper und Differentialgeometrie im Großen (H. GERICKE); 29. Integralgeometrie (W. MAAK); 30. Topologie (H. SEIFERT und W. THRELFALL).

*E. Trost.*