Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nach außen ableitet. Auf diese Weise wollen wir jetzt das System S vom Zustand Z_1 in den Zustand Z_0 überführen. Dabei tauschen wir aus:

1. Wärme mit einer nicht zu S gehörigen Menge idealen Gases;
2. mechanische Energie mit einem heb- und senkbaren, ebenfalls nicht zu S gehörigen Gewicht M;
3. mechanische Energie zwischen dem idealen Gas und dem Gewicht M, um das Gas je nach Bedarf auf eine Temperatur zu bringen, welche die gewünschte Art des Wärmeaustausches mit S gestattet.

Das System S hat in den beiden Zuständen Z_1 und Z_0 dieselbe Energie. Denn es war vorausgesetzt, daß S das System aller am Vorgang V beteiligten Dinge sei.

Nachdem nun S im Zustand Z_0 ist, haben auch das ideale Gas und das Gewicht M zusammen wieder dieselbe Gesamtenergie wie am Anfang. Um nun das Gas wieder in den ursprünglichen Zustand zurückzuführen, führen wir ihm von M mechanische Energie in dem Betrage zu, daß es die ursprüngliche innere Energie hat. Jetzt kann es ohne Änderung der inneren Energie in den ursprünglichen Zustand zurückgeführt werden, ohne daß irgendwo Veränderungen zurückbleiben. Nämlich:

1. wenn sein Volumen zu klein ist, durch Ausdehnung ohne Änderung der inneren Energie (Gay-Lussac-Vorgang);
2. wenn das Volumen zu groß ist, durch den dazu «reversen» Prozeß, der nach der Voraussetzung des Satzes (r) existiert.

Nach dem 1. Hauptsatz hat jetzt auch M wieder die ursprüngliche Energie, ist also wieder im ursprünglichen Zustand, da dieser durch die Energie eindeutig bestimmt ist.

Damit ist (g) aus (i) abgeleitet und daraus läßt sich, wie schon bemerkt wurde, der zweite Hauptsatz deduzieren. Der Weg, den PLANCK am angeführten Orte geht, ist kurz der folgende:

1. Definition der Entropie für ideale Gase (§ 119ff.).
2. Beweis des zweiten Hauptsatzes für ideale Gase (§ 124).
3. Beweis des zweiten Hauptsatzes für beliebige Systeme.

WALTER NEF, Fribourg.

Kleine Mitteilungen

I. *Sur un problème de M. Hadamard*

Le problème 50 proposé par M. HADAMARD dans les *Elemente der Mathematik* (*4*, 18 [1949]) peut être exprimé plus généralement sous la forme suivante:

Soit c une conique quelconque et soient A et B deux points quelconques sur une droite a. Considérons toutes les coniques c' passant par A et B, tangentes à c et en collinéation centrale avec elle, le centre de collinéation R étant sur la droite a. Quel est le lieu du pôle P de la droite a par rapport aux coniques c'?

Faisons les notations suivantes: D et E: intersections de a et de c; M: pôle de DE par rapport à c; t: axe de collinéation tangent en T à c et c'; K: intersection des droites t, EM, BP (en supposant d'abord que les points B et E, A et D se correspondent dans la collinéation); S: intersection de a et de t. On remarquera tout de suite que S est le deuxième point double de la projectivité définie sur a par $(RAB\ldots)$ et $(RDE\ldots)$.

Le point P est l'intersection des droites $d = MR$ et d' = tangente à c' en A. Il existe une correspondance (1, 2) entre les rayons d et d': Un rayon d coupe a en R. Par le point S (univoquement déterminé par R) passent deux tangentes à c qui coupent MD en C et C'. Les droites AC et AC' sont les rayons d' qui correspondent à d. Inversement, un rayon d' par A coupe MD en un point K. La seconde tangente menée de K à c est l'axe de collinéation qui coupe AB en S; le correspondant unique R détermine le seul rayon $MR = d$. Par conséquent, dans l'hypothèse où les points A et B correspondent aux points D et E dans la collinéation, le lieu du point P est une cubique. Comme au

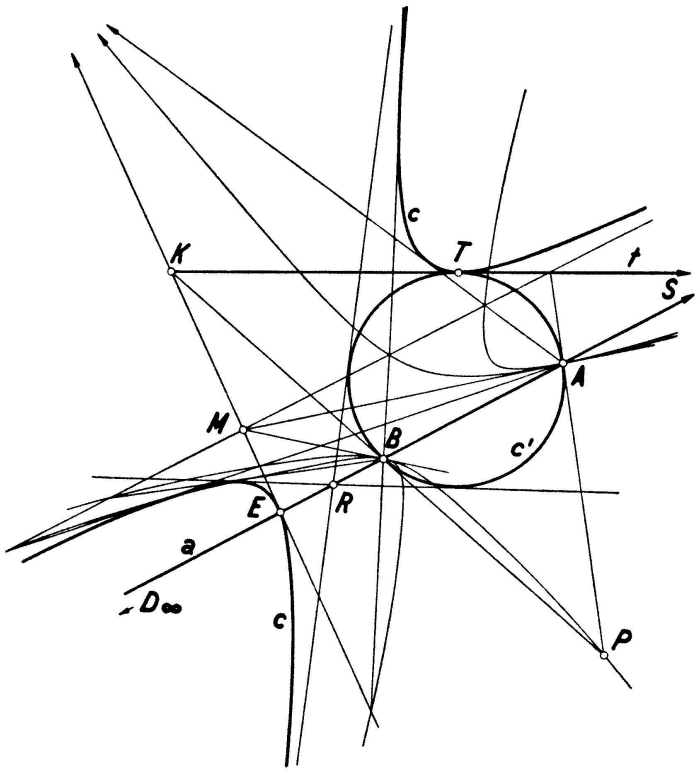

Fig. 1

rayon $d = MA$ correspondent les rayons confondus $d' = MA$, le lieu est une conique passant par A et tangente à AM. Les mêmes raisonnements s'appliquant en considérant le point B à la place du point A, cette conique passe aussi par B et y a pour tangente la droite BM.

D'autre part, en faisant l'hypothèse que les points A et B correspondent aux points E et D, on obtient une nouvelle conique.

Dans le cas particulier où le rayon d est confondu avec la droite MD, les points P sont alors les points d'intersection avec cette droite des tangentes menées de B à la conique donnée (de A dans le second cas). Nous avons donc la solution de la première partie du problème de M. HADAMARD:

Le lieu cherché se compose de deux coniques passant par A et B, tangentes en ces points, le pôle de contact étant le point M. La première conique passe par les points d'intersection des tangentes menées de B avec la tangente MD et par les points d'intersection des tangentes menées de A avec la tangente ME; la seconde par les points où les tangentes menées de B coupent la tangente ME et où les tangentes menées de A coupent la tangente MD (fig. 1).

Pour établir la deuxième partie du théorème, rappelons tout d'abord que, si S, A, B sont trois points d'une conique, les droites SA et SB forment un groupe harmonique avec la tangente à la conique en S et la droite joignant S au pôle de AB par rapport à la conique. On voit donc que

$$A(T, B, K, P) = -1 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad T(A, B, P, S) = -1 \quad (2).$$

Considérons le faisceau bitangent déterminé par c et la double polaire de K. Les tangentes menées de A à ce faisceau forment une involution dont deux rayons correspondants sont AE et AT, un rayon double étant AK. Le deuxième rayon double est donc AP en vertu de (1). Par conséquent, les deux tangentes menées de A à la conique c forment un groupe harmonique avec les droites AK et AP.

Considérons dès lors le faisceau bitangent déterminé par c et la double polaire de P. La droite AP étant un rayon double de l'involution des tangentes menées de A à ce faisceau, et les tangentes menées à c se correspondant, la droite AK est le deuxième rayon double, c.-à-d. que la tangente en A à la conique du faisceau qui passe par A est la droite AK. Par suite, en vertu de (1), les droites AT et AB sont tangentes à une conique de ce faisceau. D'autre part, les rayons doubles de l'involution des tangentes menées de T à ce faisceau étant TK et TP, les droites TA et TB sont, en vertu de (2), tangentes à une conique du faisceau. Enfin, les droites RP et RA étant conjuguées par rapport à c, la droite AB touche une conique du faisceau en R. Par conséquent, *la conique s' du faisceau qui touche AT touche encore TB et touche AB en R.*

Comme les coniques c et c' jouent le même rôle dans notre figure, *il existe aussi une conique s bitangente à c', le pôle de contact étant M, tangente aux droites TD et TE et touchant ED en R.* Cette conique est donc triangulairement inscrite à c (fig. 2).

Cas particulier: Les points A et B sont les points cycliques. On a alors le problème proposé par M. HADAMARD.

Le lieu des centres des cercles tangents à une conique et en affinité perspective avec elle se compose de deux cercles concentriques à la conique donnée; ces cercles passent par les points d'intersection des droites isotropes des foyers avec les asymptotes de la conique. Dans le cas de l'ellipse de demi-axes a et b, ces cercles ont des rayons égaux à $(a \pm b)$, dans le cas de l'hyperbole, à $(a \pm i\,b)$.

Le point de contact T d'un de ces cercles de centre P est le foyer d'une parabole s' d'axe parallèle à MP (M = centre de la conique) bitangente à la conique, le pôle de contact étant le point P. Il existe une autre parabole s, d'axe parallèle à MP, bitangente au cercle, le pôle de contact étant le point M; les tangentes menées de T à s sont parallèles aux asymptotes de la conique.

Notons le théorème corrélatif:

Soit c une conique quelconque et soient a et b deux droites se coupant en un point A. Considéront toutes les coniques c' tangentes à c et aux droites a et b et telles que les deux autres points d'intersection F et G de c et c' soient alignés sur A. L'enveloppe des polaires p du point A par rapport à ces coniques c' se compose de deux coniques tangentes aux droites a et b aux points où la polaire m de A par rapport à c coupe ces droites. Soient U, U', V, V', W, W' les points où a, b, m coupent c; la première conique touche les droites UW, $U'W$, VW, $V'W'$, la deuxième les droites UW', $U'W'$, VW, $V'W$.

Soient encore T le point de contact de c et c' et t la tangente, $FG = r$ étant la corde commune, d et e les tangentes menées de A à c.

Il existe une conique s bitangente à c', la corde de contact étant m, tangente en A à r et passant par les points d'intersection avec t des tangentes d et e.

Il existe une conique s', bitangente à c, la corde de contact étant p, tangente en A à r, et passant par les points d'intersection de t avec les droites a et b.

Supposons que c'' varie dans le faisceau $\mathfrak{F} = (c\,c')$. Alors s'' décrit un faisceau ponctuel $\mathfrak{P}$, toutes les coniques étant tangentes en A à r et passant par les points d'intersection de t et de a et b. Les faisceaux $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}$ sont tels que leurs coniques sont deux à deux bitangentes sur la droite m. Si $c'' = t\,r$, $s'' = t\,r$. Les faisceaux $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}$ ont une conique commune; par conséquent, deux faisceaux quelconques du réseau $(\mathfrak{F}, \mathfrak{P})$ ont une conique commune, en particulier les faisceaux (c, s) et $(c', d\,e)$, c.-à-d.:

Il existe une conique passant par les points d'intersection de s et de c et par les points où les droites d et e coupent c'.

Il existe une conique passant par les points d'intersection de s' et de c' et par les points où les droites a et b coupent c.

Les points T et A jouent des rôles analogues par rapport aux faisceaux $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{P}$. Donc:

Il existe une conique tangente en A à r, tangente aux droites TF et TG, les points de contact étant sur m, et passant par les points où d et e coupent t.

Les résultats corrélatifs pour le premier problème donnent:

Il existe une conique du faisceau tangentiel déterminé par s et c qui touche les quatre tangentes menées de D et de E à c'.

Il existe une conique du faisceau tangentiel déterminé par c' et s' qui touche les quatre tangentes menées de A et B à c.

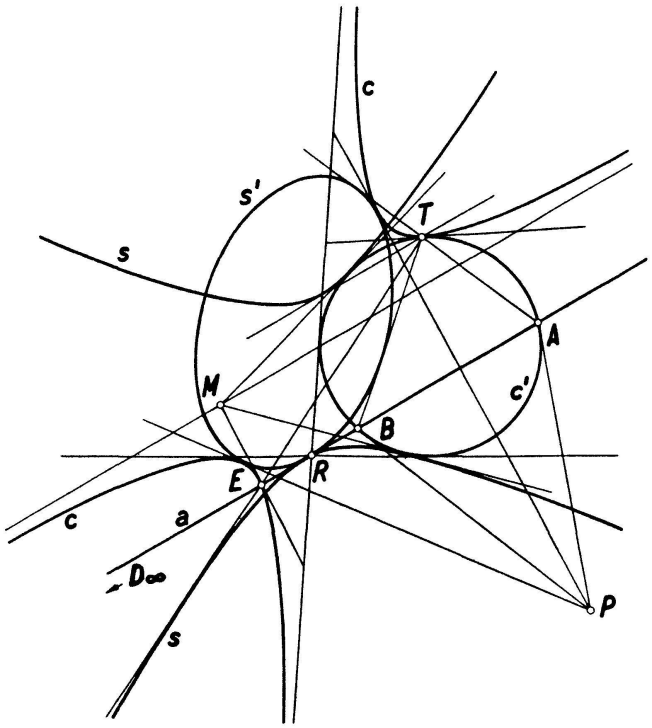

Fig. 2

Il existe une conique tangente en R à a, passant par les points où t coupe les tangentes communes à c et c', les tangentes en ces points passant par M, et tangente aux droites TD et TE, et une autre conique tangente en R à a, passant par les points où t coupe les tangentes communes à c et c', les tangentes en ces points passant par P, et tangentes aux droites TA et TB.

Dans le cas particulier où les points A et B sont les points cycliques, on obtient les résultats particuliers suivants:

Le faisceau tangentiel déterminé par s' et c' contient une conique homofocale à la conique donnée c.

Le point T est le foyer d'une parabole d'axe parallèle à MP, passant par les points où t coupe les tangentes parallèles de c et c', les tangentes en ces points passant par P. La directrice passe par P.

Soit c_1 une conique tangente en T à une droite t. Transformons cette conique par une collinéation centrale $\mathfrak{C}$ de centre R et d'axe t en une conique c_2, transformée elle-même en c_3 par $\mathfrak{C}, \ldots: c_{i+1} = \mathfrak{C}\, c_i$.

Soient a une droite quelconque par R, M_i son pôle par rapport à c_i, A_i et B_i ses points d'intersection avec c_i.

D'après les résultats précédents, il existe une conique s_{i+1} bitangente à c_{i+1}, le pôle de contact étant M_i, tangente en R à a et tangente aux droites TA_i et TB_i.

La conique s_i étant transformée en s_{i+1} par $\mathfrak{C}$, toutes les coniques s_i se coupent sur t en deux points F et G.

En appliquant nos résultats duaux à ces coniques, nous trouvons qu'il existe une conique t_i bitangente à s_i, la corde de contact étant la polaire de T par rapport à s_{i+1},

tangente en R à a et passant par les points d'intersection de a avec les tangentes menées de T à s_{i+1}, c.-à-d. par A_i et B_i. Par conséquent, $t_i = c_i$.

Finalement donc, on obtient que:

La polaire de M_i par rapport à s_{i+1} coïncide avec la polaire de T par rapport à s_{i+2}, c.-à-d. que les points de contact de c_{i+1} et s_{i+1} et les points de contact de s_{i+1} avec les droites TA_{i+1} et TB_{i+1} sont sur une même droite.

En considérant la collinéation $\mathfrak{C}^{-1}$ inverse de $\mathfrak{C}$, on voit d'autre part que:

Il existe une conique s_i' bitangente à c_i, le pôle de contact étant M_{i+1}, tangente en R à a et tangente aux droites TA_{i+1} et TB_{i+1}. Toutes les coniques s_i' se coupent sur t. La polaire de M_i par rapport à s_{i-1}' coïncide avec la polaire de T par rapport à s_{i-2}'.

J.-P. SYDLER, Zurich.

II. *Sur une équation fonctionnelle*

M. E. TROST[1]) s'est occupé de l'équation

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x+t) \sin t \, dt = 0 \tag{1}$$

qui, α étant une constante, doit être vérifiée pour chaque valeur de x. Il a trouvé des solutions de forme

$$f(t) = a\,t + b\,t^2, \qquad f(t) = e^{kt}, \qquad f(t) = \sin a\,t,$$

auxquelles correspondent des valeurs particulières de la constante α, et il a posé[2]) le problème de la recherche de toutes les solutions de (1).

Je n'ai pas réussi à trouver toutes les solutions de (1), mais je vais démontrer qu'à chaque $\alpha > 0$ correspond une infinité de solutions linéairement indépendantes. A cet effet, soit λ un nombre complexe ($\lambda \neq 0$). La fonction $c\,e^{\lambda t}$ ($c \neq 0$) sera une solution de (1) seulement si

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\lambda t} \sin t \, dt = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\lambda \sin\alpha \cosh\lambda\alpha - \cos\alpha \sinh\lambda\alpha}{1+\lambda^2} = 0. \tag{2}$$

Les valeurs $\lambda = \pm i$ sont inadmissibles, parce que

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\pm it} \sin t \, dt = 0$$

équivaut à $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 t \, dt = 0$, ce qui implique $\alpha = 0$. Donc (2) équivaut à

$$\varphi(\lambda) = \lambda \sin\alpha \cosh\lambda\alpha - \cos\alpha \sinh\lambda\alpha = 0. \tag{3}$$

Soit α fixé; en tant que fonction de λ, $\varphi(\lambda)$ est une fonction entière de type moyen de l'ordre 1. Une telle fonction possède une infinité de zéros, à moins qu'elle ne soit de la forme $P(\lambda)\,e^{a\lambda}$ où $P(\lambda)$ est un polynome et a une constante. Mais $\varphi(\lambda)$ est une fonction impaire non constante, ce qui est impossible pour une fonction $P(\lambda)\,e^{a\lambda}$. Donc pour tout α il y a une infinité de valeurs de λ rendant $\varphi(\lambda) = 0$. Un tel $\lambda = \mu + i\,\nu$ donne

---

[1]) E. TROST, *Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises*, El. Math. *2*, 76–80 (1947).

[2]) E. TROST, Intermédiaire Rech. math. *4*, 99 (1948).

naissance à deux solutions réelles linéairement indépendantes de (1), à savoir

$$e^{\mu t}\cos \nu t, \qquad e^{\mu t}\sin \nu t,$$

les parties réelles et imaginaires de $e^{\lambda t}$.

De plus, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les zéros de $\varphi(\lambda)$ correspondants au même α, et prenons des constantes $a_1, a_2, \ldots$ telles que la série

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$$

converge uniformément dans tout domaine borné du plan complexe contenant un intervalle réel. (Un tel choix des a_n est, bien entendu, toujours possible, et d'une infinité non dénombrable de façons.) Les parties réelles et imaginaires de $g(t)$ fournissent des nouvelles solutions de (1).

Il sera peut-être intéressant de noter que dans le domaine des fonctions analytiques l'équation (1) équivaut au système infini d'équations

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f^{(k)}(t) \sin t \, dt = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

En effet, soit $f(x)$ une solution analytique de (1). En dérivant (1) k fois, on obtient

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f^{(k)}(x+t) \sin t \, dt = 0,$$

d'où en faisant $x = 0$ on tire (5). Réciproquement, une solution $f(x)$ de (5), analytique pour tout x réel, est une solution de (1). En effet, soit $f(x)$ une telle fonction; donc il existe un nombre positif M tel que

$$\left| \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right| \leqq M. \quad (-\alpha \leqq t \leqq \alpha;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (6)$$

Les inégalités (6) entraînent que le développement

$$f(x+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(t), \qquad (-\alpha \leqq t \leqq \alpha) \qquad (7)$$

converge uniformément (en t) si $|x| < 1/M$. Nous pouvons donc substituer (7) dans (1) et intégrer terme à terme; en égard à (5), on obtient bien (1) pour $|x| < 1/M$; mais le membre gauche de (1) est une fonction analytique de x et, étant nul pour $|x| < 1/M$, il l'est aussi pour tout x.

En faisant usage de (5), on démontre facilement que toute solution polynomiale de (1) est quadratique au plus. Toute polynomiale quadratique est, comme l'a montré M. Trost, une solution de (1), pourvu que α soit une racine de l'équation $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$.

Ralph P. Boas, Jr. (Providence, R. I., U.S.A.)

III. *Studie zu einer Funktionalgleichung*

Die vorliegende kleine Note bringt einige Bemerkungen über die allgemeine Lösung $\Phi(x)$ der für alle $x > 0$ gültig erklärten Funktionalgleichung

$$\Phi(\alpha x) - \alpha \Phi(x) = F(x), \qquad (1)$$

wobei $\alpha \neq 1$ eine feste positive Konstante (Parameter der Funktionalgleichung) und $F(x)$ eine vorgegebene, für $x \geqq 0$ definierte Funktion bezeichnet.

Es ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, die Bedingung

$$0 < \alpha < 1 \tag{2}$$

zu stellen. In der Tat: Ist nämlich zunächst $\alpha > 1$, so transformiert die Substitution $y = \alpha x$, $\beta = 1/\alpha$ die Funktionalgleichung (1) in

$$\Phi(\beta y) - \beta \Phi(y) = -F(\beta y), \tag{3}$$

wobei der Parameter β nunmehr die Bedingung (2) erfüllt.

Zunächst wird eine Darstellung einer partikulären Lösung $\Phi_0(x)$ der inhomogenen Gleichung (1) angegeben. Diese ist an eine Voraussetzung über das infinitesimale Verhalten der Funktion $F(x)$ in der rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ gebunden, eine Voraussetzung, welche für die Funktionen einer sehr umfassenden Klasse erfüllt ist, so z. B. für diejenigen, welche in einer Umgebung von $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar sind. Die fragliche Voraussetzung lautet wie folgt: Die Funktion $F(x)$ besitzt in $x = 0$ eine rechtsseitige Ableitung $F'(0)$, und es gibt ein $\tau > 1$, so daß für $x \to +0$ die Beziehung

$$F(x) = F(0) + F'(0)\, x + 0(x^\tau) \tag{4}$$

gilt. Eine partikuläre Lösung der Funktionalgleichung (1) ist sodann durch

$$\Phi_0(x) = \frac{F(0)}{1-\alpha} + \frac{F'(0)}{\alpha \log \alpha}\, x \log x - \frac{x}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{F(\alpha^\nu x) - F(0)}{\alpha^\nu x} - F'(0) \right\} \tag{5}$$

gegeben. Die in dieser Darstellung vorgeschriebene Reihe ist offenbar konvergent, da wegen (4) für $\nu \to \infty$

$$\left\{ \frac{F(\alpha^\nu x) - F(0)}{\alpha^\nu x} - F'(0) \right\} = 0(\alpha^{[\tau - 1]\nu})$$

gilt, woraus sich mit (2) die Konvergenz ergibt. Die Verifikation, daß durch Ansatz (5) tatsächlich eine Lösung von (1) gegeben ist, gestaltet sich sehr einfach, und sie darf dem Leser überlassen werden.

Nunmehr kann die allgemeine Lösung von (1) in der Form

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \varphi(x) \tag{6}$$

angesetzt werden, wobei $\varphi(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Funktionalgleichung

$$\varphi(\alpha x) - \alpha \varphi(x) = 0 \tag{7}$$

bezeichnet. Diese ist indessen durch

$$\varphi(x) = \alpha^{\left[\frac{\log x}{\log \alpha}\right]} \omega\left(x\, \alpha^{-\left[\frac{\log x}{\log \alpha}\right]}\right) \tag{8}$$

gegeben, wobei [] das Gaußsche Klammersymbol bezeichnet und $\omega(\vartheta)$ eine im Intervall $\alpha < \vartheta \leqq 1$ definierte willkürliche Funktion bedeutet.

Das Argument

$$\vartheta = x\, \alpha^{-\left[\frac{\log x}{\log \alpha}\right]}$$

fällt in das oben festgelegte Definitionsintervall der Funktion $\omega(\vartheta)$. Um dies einzusehen, setzt man

$$x = \alpha^{\left(\frac{\log x}{\log \alpha}\right)},$$

so daß sich

$$\vartheta = \alpha^{\Delta} \qquad (0 \leqq \Delta < 1)$$

ergibt. Hieraus folgt $\alpha < \vartheta \leqq 1$.

Daß durch (8) eine Lösung der homogenen Funktionalgleichung (7) gegeben ist, kann unmittelbar abgelesen werden. Andererseits kann jede Lösung in der Form (8) dargestellt werden. In der Tat: Die Funktion $\varphi(x)$ ist offenbar vollständig bestimmt, wenn ihre Funktionswerte im Intervall $\alpha < x \leqq 1$ vorgegeben sind. Ausgehend von einer vorgeschriebenen Lösung $\varphi(x)$ setze man im Intervall $\alpha < \vartheta \leqq 1$ $\omega(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$. Mit der auf diese Weise ermittelten Funktion $\omega(\vartheta)$ hat man in (8) zunächst im Intervall $\alpha < x \leqq 1$ Übereinstimmung erzielt, da dort ja

$$\left[\frac{\log x}{\log \alpha}\right] = 0$$

gilt. Wegen der geltenden Funktionalrelation (7) folgt die Übereinstimmung für alle $x > 0$.

Eine weitere Bemerkung bezieht sich auf die Stetigkeit der Lösung.

Es ist leicht zu erkennen, daß $\varphi(x)$ dann und nur dann stetig ist, wenn $\omega(\vartheta)$ im Intervall $\alpha \leqq \vartheta \leqq 1$ stetig (in den Endpunkten einseitig stetig) ist und wenn weiter die Relation $\omega(\alpha) = \alpha\, \omega(1)$ besteht.

Endlich sei bemerkt, daß sich für $\omega(\vartheta) = C\,\vartheta$ die triviale Lösung

$$\varphi(x) = C\,x \tag{9}$$

ergibt[1]).

H. HADWIGER, Bern.

IV. *Zur Herleitung der Additionstheoreme der goniometrischen Funktionen*

Es gibt bekanntlich wenige Möglichkeiten, die Additionstheoreme der goniometrischen Funktionen in voller Allgemeinheit herzuleiten. Daher dürfte folgender Weg, der an den «historisch ältesten Beweis[2])» anknüpft, nicht des Interesses ermangeln. Jener Beweis stützt sich auf den Ptolemäischen Lehrsatz:

In jedem konvexen Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalenmaßzahlen gleich der Summe der Produkte der Maßzahlen seiner Gegenseiten.

Unser Weg führt den Schüler ganz «naturgemäß» auf die Additionstheoreme. Gespannt wird der Schüler auf das Kommende etwa durch folgende Vorbereitung.

Sei α irgendein analytischer Winkel und $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ der Einheitspunkt seines Endschenkels[3]). Dann ist bekanntlich nach PYTHAGORAS (rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenmaßzahlen

$$|x| = |\cos\alpha|, \quad |y| = |\sin\alpha|,$$

$$|\sin\alpha|^2 + |\cos\alpha|^2 = 1,$$

also

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

eine Formel, die allgemeine Gültigkeit besitzt. Wegen $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ und $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ und $\sin 90^\circ = 1$, folgt aus (1):

$$\sin\alpha\cos(90^\circ - \alpha) + \cos\alpha\sin(90^\circ - \alpha) = \sin 90^\circ.$$

---

[1]) A. C. OECONOMON (*Sur une équation fonctionnelle*, Actes Congr. Interbalkan. Math., Athènes, 1934, S. 215–218) hat u. a. gezeigt, daß die triviale Lösung die einzige nichtkonkave Lösung ist.

[2]) Siehe G. HESSENBERG, *Ebene und sphärische Trigonometrie* (Sammlung Göschen, 4. Auflage, 1934), S. 66.

[3]) Siehe meinen Aufsatz: *Herleitung der Quadrantenrelationen in der Goniometrie*, diese Zeitschrift, Heft 3 (1950).

Und weil $90° = \alpha + (90° - \alpha)$, ist es naheliegend, zu fragen, ob ganz allgemein

$$\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) \tag{2}$$

ist. Eine analoge Frage entsteht bei der Betrachtung der Identität

$$\cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

wenn man diese so anschreibt:

$$\cos\alpha \cos(90° - \alpha) - \sin\alpha \sin(90° - \alpha) = \cos 90°,$$

nämlich, ob ganz allgemein gilt

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha + \beta). \tag{3}$$

Zunächst sieht der Schüler ein, daß, wenn man z. B. (2) als allgemeingültig annimmt, (3) aus (2) unmittelbar folgt, denn

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin[(90° - \alpha) + (-\beta)] = \sin(90° - \alpha)\cos(-\beta) + \sin(90° - \alpha)\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

aber auch umgekehrt. Ferner ergäben sich aus der Annahme der Allgemeingültigkeit von (2) die Entwicklungen (sogenannte «Subtraktionstheoreme»)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \tag{4}$$

und

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \tag{5}$$

Der Schüler gewinnt daher die Überzeugung, daß es genügt, die allgemeine Gültigkeit einer der vier Entwicklungen (2), (3), (4), (5) nachzuweisen, um die übrigen sicherzustellen. Ich beweise nun die Allgemeingültigkeit des Subtraktionstheorems (4).

Sei P der Einheitspunkt des Endschenkels des analytischen Winkels $\delta = (\alpha - \beta)$ (gemeinsamer Endschenkel von α und β!) und seien P' und P'' die Normalprojektionen von P auf die Anfangsschenkel von α und β. Dann liegen die vier Punkte P, P', P'' und O (gemeinsamer Scheitel von α und β) auf einer Kreislinie mit dem Durchmesser 1. Denkt man sich auch noch die Verbindungsstrecke $P'P''$ eingezeichnet, so kann man die vier Punkte O, P, P', P'', abgesehen von Grenzfällen, für jede Winkelwahl in einer passenden Reihenfolge als Ecken eines konvexen Sehnenvierecks betrachten und, unter Beachtung, daß die Maßzahl einer Kreissehne gleich dem Produkt aus der Maßzahl des Kreisdurchmessers und dem Sinus des über der Sehne stehenden Peripheriewinkels ist, den Ptolemäischen Lehrsatz auf dieses Sehnenviereck anwenden, woraus das in Rede stehende Subtraktionstheorem sofort folgt.

Einige Zeichnungen mögen kommentarlos das Gesagte illustrieren. Es ist für den Schüler immer ein Vergnügen, die gleiche Methode allen denkbaren Fällen dienstbar zu machen.

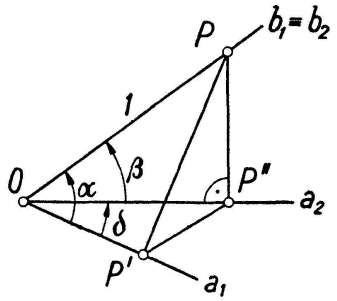

Fig. 1

$$\text{Maßzahl von} \left\{\begin{matrix} PP' \\ PP'' \\ OP' \\ OP'' \\ P'P'' \end{matrix}\right\} \text{ ist } \left\{\begin{matrix} \sin\alpha \\ \sin\beta \\ \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \sin(\alpha - \beta) \end{matrix}\right.$$

$$1 \cdot \sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha \cos\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

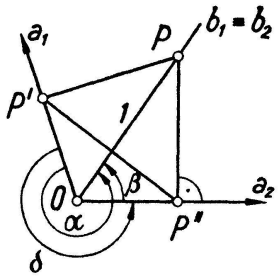

Fig. 2

$$\text{Maßzahl von} \begin{Bmatrix} PP' \\ PP'' \\ OP' \\ OP'' \\ P'P'' \end{Bmatrix} \text{ ist } \begin{Bmatrix} |\sin\alpha| = -\sin\alpha \\ \sin\beta \\ \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \sin(\alpha - 180^\circ - \beta) = -\sin(\alpha - \beta) \end{Bmatrix}$$

$$1 \cdot [-\sin(\alpha - \beta)] = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

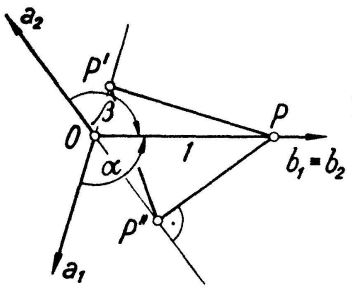

Fig. 3

$$\text{Maßzahl von} \begin{Bmatrix} PP' \\ PP'' \\ OP' \\ OP'' \\ P'P'' \end{Bmatrix} \text{ ist } \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ |\sin\beta| = -\sin\beta \\ |\cos\alpha| = -\cos\alpha \\ |\cos\beta| = -\cos\beta \\ \sin(360^\circ - \alpha + \beta) = -\sin(\alpha - \beta) \end{Bmatrix}$$

$$1 \cdot [-\sin(\alpha - \beta)] = \sin\alpha\,(-\cos\beta) + (-\cos\alpha)\,(-\sin\beta),$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 67. Durch einen veränderlichen Punkt P einer Parabel mit dem Scheitel S ziehe man den Durchmesser, der die Scheiteltangente in A schneidet. Man bestimme den geometrischen Ort des Fußpunktes des von A aus SP gefällten Lotes.

E. ROTHMUND (Zürich).

1. Lösung: Die Verlängerung des Lotes aus A auf SP schneide die Parabelachse in Q. Dann ist wegen $\overline{SQ}:\overline{SA} = \overline{SA}:\overline{AP}$ $\overline{SQ} = \overline{SA}^2/\overline{AP} =$ konstant. Der gesuchte geometrische Ort ist also ein Kreis über SQ als Durchmesser. Da die Konstante gleich $2\,p$ ist (p Parameter der Parabel), so ist der Kreis der Scheitelkrümmungskreis.

F. GOLDNER (London).

2. Lösung: Die Parabel mit dem Scheitel S und der Scheiteltangente s darf aufgefaßt werden als zentralkollineares Bild eines Kreises $\mathfrak{K}$, welcher s in S berührt; mit S als Kollineationszentrum, s als Kollineationsachse und der dazu parallelen Kreistangente t in T als Verschwindungslinie. Die Symmetriegerade durch die Berührungspunkte S und T wird dann Hauptachse der Bildparabel. Der Geraden TKA durch den beliebigen Kreispunkt K entspricht die zu ST parallele Bildgerade PA durch den zugeordneten Parabelpunkt P, und der Punkt K hat offenbar gerade die in der Aufgabe geforderte Fußpunktseigenschaft. *Der gesuchte geometrische Ort ist somit der Kreis* $\mathfrak{K}$. Dieser Kreis ergibt sich auch als Grenzlage des Kreises, der s in S berührt und durch P geht, wenn sich P unbegrenzt S nähert. Er ist also der Krümmungskreis in S.

P. GLUR (Bern).

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), I. HESSELBERG (Noestved, Dänemark), S. JOSS (Bern), L. KIEFER (Luxemburg), A. SCHWARZ (Seuzach) und A. STOLL (Zürich).