Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

dann als gegeben gelten lassen, wenn für sie ein bestimmtes Bildungsgesetz gegeben wird. Das ist aber eine zu starke Einschränkung. In der Tat, läßt man nur Gesetze zu, die in endlicher Form aufgeschrieben werden können, so ist ihre Anzahl sicher abzählbar, und das ganze Kontinuumproblem fällt dahin. Künstliche Beschränkungen sind eben unzulässig, wenn man nicht Teile der Mathematik ausschalten will. So gibt es in der Mathematik sicher überabzählbar viele Sätze und zugehörige Beweise, indem schon für jede Zahl der Unterschied von algebraisch und transzendent besteht. Aber man kann sie nicht alle aufschreiben. Gibt es für das Kontinuumproblem einen Beweis, der sich aufschreiben läßt?

Beschränkungen kommen immer herein, wenn die Untersuchung in einem bestimmten logistischen System geführt wird. GÖDEL hat für ein solches nachgewiesen, daß die Cantorsche Hypothese unter bestimmten Annahmen mit ihm verträglich ist. Das ist aber weniger eine Aussage zum Problem selbst als über das zugrunde liegende System. So kann eine Behauptung durchaus wahr oder falsch sein, ohne daß innerhalb des logistischen Systems ihr Beweis formulierbar wäre[1]. Es ist die Beschränkung auf einen Formalismus, die mathematische Sätze unentscheidbar macht. Dagegen ist bewiesen, daß im absoluten Sinn keine unentscheidbaren Sätze möglich sind[2].

In theoretischer Hinsicht kann daher nicht bezweifelt werden, daß die Bemühung um das Kontinuumproblem sinnvoll ist. Aber es bleibt die Frage, was praktisch dabei zu erwarten ist, nachdem die letzten 50 Jahre so wenig Hoffnung auf eine praktische Bewältigung übrig ließen. Die Antwort kann in einem Bilde gegeben werden: Wenn man auf der Erde wandert, so kann man sich nach einem Sterne richten. Man weiß dann, man wird ihn nie erreichen. Trotzdem ist man in Bewegung auf ihn zu. Er gibt Richtung und Orientierung.

Zum Schluße des Vortrages sprach der Vortragende über eine noch nicht veröffentlichte Untersuchung, die aus solcher Orientierung entsprungen ist. Sie bezieht sich auf die in der II. Zahlklasse (Klasse der abzählbaren transfiniten Ordnungszahlen) auftretenden kritischen Zahlen, wofür als Beispiel die bekannte ε-Zahl hier genannt sei.

In der anschließenden Diskussion war Prof. FINSLER veranlaßt, ein Beispiel eines wahren, aber formal unentscheidbaren Satzes vorzutragen, welches das Interesse der Zuhörer entschieden zu fesseln vermochte. Die Finslerschen Paradigmen zum Gegensatz von absolutem und formalistischem Denken beeindrucken immer wieder durch ihre lapidare, von allem Unwesentlichen befreite Gestalt, durch die hindurch das Ausmaß der an sie gewendeten Gedankenarbeit spürbar wird und die eben dadurch die Denkkraft in so eminenter Weise herauszufordern imstande sind. G. BALASTER.

Aufgaben

Aufgabe 65. Gegeben sei eine Kugel K mit dem Radius a. Wir bezeichnen als ein *Zwerchfell* von K denjenigen Teil einer K schneidenden Kugelfläche, der sich innerhalb K befindet. Man beweise: 1. Alle Zwerchfelle durch den Mittelpunkt von K haben dieselbe Fläche. 2. Kein den Voluminhalt von K halbierendes Zwerchfell hat einen Flächeninhalt unterhalb πa^2. G. PÓLYA.

Lösung: 1. Die Mantelfläche einer Kugelkalotte kann nach der Formel $M = \pi s^2$ berechnet werden, wobei s der Abstand des Scheitels von einem Punkt des Randkreises ist (Kathetensatz!). In der Aufgabe ist dieser Abstand für alle Zwerchfelle durch den Mittelpunkt von K gleich dem Radius a. Also ist $M = \pi a^2$.

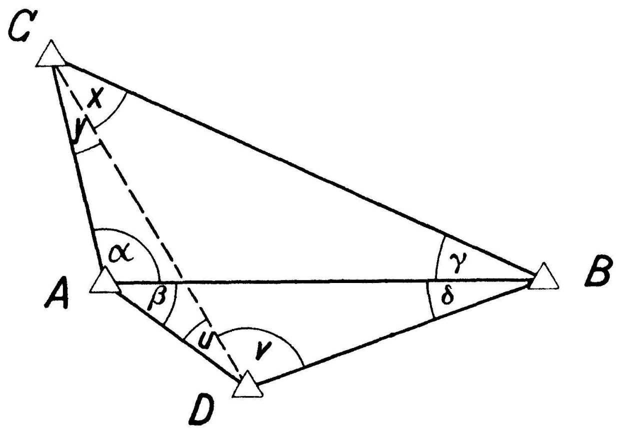
2. Soll das Volumen der gegebenen Kugel halbiert werden, so muß die Gesamthöhe h der Doppelkalotte, welche bei der Durchdringung der beiden Kugeln entsteht, die Bedingung $h \geqq a$ erfüllen. Damit ist auch $s \geqq a$ und folglich der Flächeninhalt für alle den Voluminhalt von K halbierenden Zwerchfelle $\geqq \pi a^2$. A. MARET, Biel.

[1] P. FINSLER, *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit*, Math. Z. *25*, 676 (1926).
[2] P. FINSLER, *Gibt es unentscheidbare Sätze?*, Comm. Math. Helv. *16*, 310 (1943/44).

Weitere Lösungen sandten P. GLUR (Bern), F. GOLDNER (London), W. GYSIN (Zug), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), W. PROKOP (Winterthur), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich), A. SCHWARZ (Seuzach), A. STOLL (Zürich).

Aufgabe 66. Anläßlich der städtischen Triangulation von Luzern ergab sich folgendes Problem:

Von A und B aus (siehe Skizze) sind gegenseitig alle Punkte des Triangulationsvierecks mit den Stationen A, B, C, D sichtbar, so daß die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ direkt



A = Allenwinden, B = Dreilinden, C = Sedel, D = Suva (Unfallversicherungsanstalt)

gemessen werden können. Hingegen ist die Visur CD durch eine kleine Erhebung am Rande der Stadt unterbrochen, weshalb die Winkel x, y, u, v berechnet werden müssen. Distanzen sind keine gegeben. – Man stelle eine Formel zur Berechnung des Winkels x auf. Alsdann ergeben sich die übrigen gesuchten Winkel y, u, v als Ergänzungen.

G. HAUSER.

1. Lösung: Mit dem Sinussatz findet man folgende Formeln:

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}, \qquad \overline{BD} = \frac{\overline{AB}\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)},$$

$$\frac{\sin\alpha\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin(x+\gamma+\delta)}{\sin x} = \cos(\gamma+\delta) + \operatorname{ctg} x\sin(\gamma+\delta),$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin\alpha\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)\sin(\gamma+\delta)} - \operatorname{ctg}(\gamma+\delta).$$

Ferner ist $\quad y = 180^\circ - \alpha - \gamma - x, \quad u = \gamma + x - \beta, \quad v = 180^\circ - \gamma - \delta - x.$

D. SCHÜLE, Zürich.

2. Lösung: Wir bezeichnen mit S den Schnittpunkt von AB und CD und setzen $\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD = \sigma$. Dann gilt:

$$x = \pi - (\sigma+\gamma), \qquad y = \sigma - \alpha,$$

$$u = \pi - (\sigma+\beta), \qquad v = \sigma - \delta.$$

Durch Anwendung des Sinussatzes auf die vier Dreiecke BSC, CSA, ASD und DSB ergibt sich

$$\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin\gamma\sin\beta} = \frac{\sin y\sin v}{\sin x\sin u} = \frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\delta)}{\sin(\sigma+\gamma)\sin(\sigma+\beta)}$$

und hieraus mit $\operatorname{cotg}\alpha = a$, $\operatorname{cotg}\beta = b$, $\operatorname{cotg}\gamma = c$, $\operatorname{cotg}\delta = d$ und $\operatorname{cotg}\sigma = s$:

$$1 = \frac{(a-s)\,(d-s)}{(c+s)\,(b+s)}$$

oder

$$\underline{\underline{s = \frac{a\,d - b\,c}{a+b+c+d}}}\,.$$

W. Gysin (Zug).

3. Lösung: Es handelt sich offenbar um eine etwas veränderte Problemstellung der sogenannten «Hansenschen Aufgabe». Die Ecken C und D bei den nicht meßbaren Winkeln liegen hier nicht auf derselben Seite von AB, sondern sind durch diese Strecke getrennt. Aus der Figur ergeben sich die Formeln:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{BD}\sin(\gamma+\delta)}{\sin x} = \frac{\overline{AD}\sin(\alpha+\beta)}{\sin y}\,,$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\overline{BD}\sin(\gamma+\delta)}{\overline{AD}\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta\sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\psi.$$

Ferner ist $x + y = 180° - \alpha - \gamma$. Die Lösung dieses Systems von zwei goniometrischen Gleichungen mit den Unbekannten x und y ergibt sich bekanntlich durch Berechnung von $x - y$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{tg}(\psi - 45°).$$

A. Schwarz (Seuzach).

Herr E. Roth-Desmeules (Luzern) weist in diesem Zusammenhang auf folgende zwei analoge Probleme hin, deren Lösung auf eine kubische Gleichung führt: Man bestimme die fehlenden Winkel erstens aus v, γ, y, β, zweitens aus $u+v$, $\gamma+\delta$, α, y.

Weitere Lösungen gingen ein von P. Glur (Bern), F. Goldner (London), R. Lauffer (Graz), W. Prokop (Winterthur), E. Roth-Desmeules (Luzern), E. Rothmund (Zürich), B. Schenker (Fetan), A. Stoll (Zürich), A. Streit (Bern).

Aufgabe 68. Man löse die für $n > 1$ gültige Rekursion

$$K_{n+1} = n\,(K_n + K_{n-1}), \qquad K_1 = 0,\ K_2 = 1.$$

Ferner berechne man den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{K_n}\,.$$

R. Stettler.

1. Lösung: Die gegebene Rekursion kann man auf die Form

$$(-1)^{n+1}[K_{n+1} - (n+1)\,K_n] = (-1)^n\,(K_n - n\,K_{n-1})$$

bringen. Somit hat der Ausdruck $(-1)^n\,(K_n - n\,K_{n-1})$ für alle Werte von $n > 1$ einen konstanten Wert C. Folglich ist $K_n = n\,K_{n-1} + (-1)^n C$. Wegen $K_1 = 0$, $K_2 = 1$ wird $C = 1$. Hieraus folgt

$$\frac{K_n}{n!} = \frac{K_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} K_n/n! = 1/e$ ergibt sich für den gesuchten Grenzwert die Zahl e.

K. Rieder (Riehen).

2. Lösung: Die als «problème des rencontres» (DE MONTMORT) oder «Problem der vertauschten Briefe» (BERNOULLI-EULER) bekannte Aufgabe der Bestimmung der Anzahl K_n aller fixpunktfreien Permutationen von n Elementen läßt sich leicht auf die Auflösung der vorgelegten Rekursionsformel zurückführen. Schreibt man nämlich jede Permutation als ein Produkt von Zykeln, so werden die Fixpunkte durch die Einerzykeln dargestellt. Eine Permutation von $n+1$ Elementen ohne Einerzyklus entsteht aber a) aus einer gleichartigen von n Elementen (Anzahl K_n) durch Einschieben des neuen Elementes hinter ein beliebiges altes, b) aus einer Permutation von n Elementen mit genau einem Einerzyklus (Anzahl $n K_{n-1}$) durch Einschieben des neuen Elementes in den Einerzyklus: $K_{n+1} = n K_n + n K_{n-1}$ für $n \geqq 1$, mit $K_0 = 1$, $K_1 = 0$.

Dieser Rekursionsformel entspricht für die erzeugende Funktion

$$y = \sum_0^\infty \frac{K_n}{n!} x^n$$

die Differentialgleichung $y' = x y' + x y$. Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = 1$

$$y = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^h}{h!} x^h\right)\left(\sum_0^\infty x^l\right) = \sum_n^\infty \left(\sum_{h=0}^n \frac{(-1)^h}{h!}\right) x^n$$

und somit

$$K_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

Insbesondere strebt die Wahrscheinlichkeit $K_n/n!$ für das Vorliegen einer fixpunktfreien Permutation mit wachsendem n alternierend gegen den Wert $1/e$.

M. ALTWEGG (Zürich).

Das Problem der vertauschten Briefe ist, wie verschiedene Löser bemerkten, behandelt in H. DÖRRIE, *Triumph der Mathematik* (Verlag F. Hirt, Breslau 1933), S. 18. Die dort angegebene Lösung stimmt im wesentlichen mit derjenigen von K. RIEDER überein, doch ist letztere noch ein wenig einfacher.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), P. GLUR (Bern), F. GOLDNER (London), J. HESSELBERG (Nøstved, Dänemark), R. LAUFFER (Graz), W. ZULLIGER (Küsnacht).

Aufgabe 72. Von einer dreispitzigen Hypozykloide h — bekanntlich eine Kurve dritter Klasse — seien der einbeschriebene Kreis k und eine Tangente t, welche k in A und A' schneidet, gegeben, h berühre t auf der Verlängerung von AA' über A hinaus. Aus einem gegebenen Punkt T von t konstruiere man die beiden andern Tangenten an h.

A. STOLL.

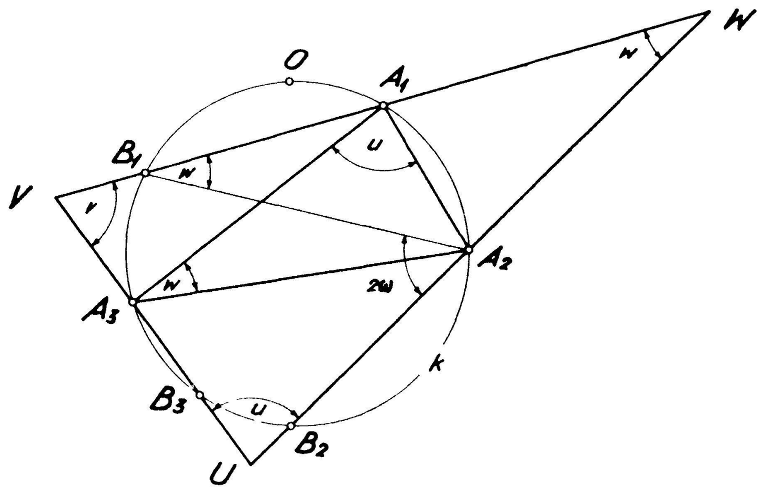
Aufgabe 73. Man beweise: Bei der dreispitzigen Hypozykloide (H) variiert die Größe der Tangentendreiecke gegebener Form zwischen Null und einem Maximum, bei dem der Umkreis doppelt so groß ist wie der Inkreis von (H), und die Mittelpunkte ihrer Umkreise liegen auf einem mit (H) konzentrischen Kreise. A. STOLL.

Aufgabe 74. Drei Wallace-Gerade eines Dreiecks bilden ein «Wallace-Dreieck». Man beweise: Damit zwei Dreiecke in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, daß jedes von ihnen ein Wallace-Dreieck des andern ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Umkreise gleich groß sind. A. STOLL.

Gemeinsame Lösung: Es sei zunächst an die folgenden, sehr leicht einzusehenden Tatsachen erinnert: Spiegelt man den Umkreis k eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ an den drei Seiten, so schneiden sich die drei neuen Kreise im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks. Auf diesen Kreisen liegen die Ecken einer Schar von Dreiecken, deren Seiten (oder deren Verlängerungen) durch A_1, A_2 und A_3 gehen und die dem ursprünglichen Dreieck gleichsinnig ähnlich sind. H ist ihr gemeinsames Umkreiszentrum. Ihre Größe variiert von Null (in H) bis zu einem Maximum, das man erhält, wenn man durch die Ecken

A_1, A_2, A_3 die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Für dieses maximale Dreieck ist k Feuerbach-Kreis, der Radius seines Umkreises ist das Doppelte desjenigen von k.

Bewegen sich zwei Punkte A und B auf einem Kreise k von einer festen Ausgangslage O aus in entgegengesetzter Richtung so, daß B die doppelte Winkelgeschwindigkeit von A hat, so hüllt die Gerade AB eine dreizipflige Hypozykloide (H) ein. A heißt Primärpunkt, B Sekundärpunkt der Hypozykloidentangente. Die beiden Primärpunkte irgend zweier Tangenten bestimmen also auf k einen halb so großen Bogen wie die beiden Sekundärpunkte. Hieraus folgt (siehe Figur), daß das Dreieck



B_1A_2W gleichschenklig ist. Will man also bei gegebenem k, wenn A_1, B_1 und W vorgeschrieben sind, die beiden anderen Tangenten von W aus konstruieren, so hat man die Mittelsenkrechte von B_1W mit k zu schneiden, die Schnittpunkte sind die beiden gesuchten Primärpunkte. Durch jeden Punkt im Innern von (H) gibt es drei, durch jeden Punkt im Äußern eine reelle Tangente (Lösung von Aufgabe 72).

Eine dritte Tangente A_3B_3 bildet mit den beiden ersten ein Tangentendreieck UVW, das vorgeschriebene Winkel u, v, w haben soll. Aus der Figur ergibt sich sofort, daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ der Primärpunkte dem Dreieck UVW gleichsinnig ähnlich ist. Um alle Tangentendreiecke gegebener Form zu untersuchen, hat man also ein festes Dreieck $A_1A_2A_3$ in k zu drehen. Statt dessen halten wir $A_1A_2A_3$ fest und drehen O mit (H). Damit entsteht aber genau die eingangs geschilderte Sachlage. Es folgt hieraus: Die Umkreiszentren aller Tangentendreiecke gegebener Form liegen auf einem zu k konzentrischen Kreis, die Dreiecke variieren von einem Nulldreieck bis zu demjenigen, das k als Feuerbach-Kreis besitzt, das heißt bis zum Hauptdreieck der gegebenen Form. In einem Hauptdreieck sind auch die Höhen Tangenten an die (H). Man sieht außerdem sofort ein, daß Hauptdreiecke jeder Form existieren (Lösung von Aufgabe 73).

Die Simsonschen oder Wallace-Geraden eines Dreiecks hüllen die Steinersche Hypozykloide dieses Dreiecks ein. Das Dreieck selber ist ein Hauptdreieck dieser (H). Damit jedes von zwei Dreiecken in einer bestimmten Lage Wallace-Dreieck des anderen sei, müssen sie folglich beide Hauptdreiecke derselben (H) sein, somit gleiche Feuerbach-Kreise und damit gleiche Umkreise besitzen. Da eine (H) Hauptdreiecke jeder beliebigen Form aufweist, ist diese Bedingung notwendig und hinreichend. (Lösung von Aufgabe 74.) WILLI LÜSSY.

Neue Aufgaben

86. Der Inkreisradius und die Ankreisradien eines rechtwinkligen Dreiecks sind dann und nur dann ganze Zahlen, wenn auch die Seiten ganzzahlig sind (Pythagoräische Dreiecke). S. JOSS (Bern).

87. Par combien de zéros se termine le nombre 100! et quel est le dernier chiffre précédant ces zéros? H. BREMEKAMP (Delft, Hollande).

88. Soit AEF un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle $ABCD$. Démontrer que l'aire du triangle ECF (E sur BC, F sur CD) est égale à la somme des aires des triangles ABE et AFD.

Généraliser ce théorème pour un polygone régulier quelconque.

La démonstration par la trigonométrie ou l'algèbre est simple. On désirerait une démonstration géométrique élémentaire. F. FIALA (Neuchâtel).

89. Man beweise, daß die Koeffizienten der Tangensreihe

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

folgender nichtlinearer Rekursionsformel genügen:

$$(n+1)\, a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}\, a_k \qquad (n > 1), \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0\,.$$

R. STETTLER (Bern).

90. Bei der Lösung einer Aufgabe aus der angewandten Mathematik ergab sich das folgende transzendente Gleichungssystem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} (\operatorname{tgh} i\, x + 1) + z = a_i\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ 4).$$

Man diskutiere die Lösungsmöglichkeit. E. ROTH-DESMEULES (Luzern).

91. w sei eine der Wallace-Geraden des Dreiecks ABC, V der Schwerpunkt ihrer Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten und v die Normale zu w durch V. Man beweise:

Die Hüllkurve der Geraden v ist eine Steinersche Hypozykloide, die in bezug auf den Schwerpunkt von ABC symmetrisch ist zur Hüllkurve der Wallace-Geraden. A. STOLL (Zürich).

92. Ein Flächenstück auf einem Drehkegel ist begrenzt von zwei kongruenten Parabelbogen, die sich im Punkte A im Abstand m von der Kegelspitze unter rechtem Winkel schneiden. Man berechne dieses Mantelstück, wenn der Öffnungswinkel des Kegels 60° beträgt. C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

93. Man bestimme den größtmöglichen Flächeninhalt eines «Zwerchfelles» (vgl. Aufgabe 65), das innerhalb einer gegebenen Kugel vom Radius a liegt, wenn der «Mittelpunkt» des Zwerchfelles nicht innerhalb der gegebenen Kugel liegt. F. GOLDNER (London).

94. Um jeden Punkt $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$ einer Ellipse als Mittelpunkt wird der Kreis mit dem Radius $c \cos\varphi\, (c = \sqrt{a^2 - b^2})$ beschrieben. Man bestimme die Enveloppe dieser Kreise. E. TROST (Zürich).

Literaturüberschau

J. C. H. GERRETSEN: *Niet-Euklidische Meetkunde*

212 Seiten, Noorduijn en zoon N. V., Gorinchem 1949

Das bereits in zweiter Auflage erschienene Büchlein gibt eine synthetische Einführung in die klassische hyperbolische Geometrie von BOLYAI und LOBATSCHEWSKIJ. Um diesen wichtigen Teil der nichteuklidischen Geometrie möglichst weiten Kreisen zugänglich zu machen, setzt der Verfasser nur die elementarsten Kenntnisse in Algebra und Geometrie voraus. So entwickelt er die Theorie der Logarithmen und hyperbolischen Funktionen ausführlich an der Hyperbel und nimmt selbst eine gewisse Umständlichkeit in Kauf, um Integrale zu vermeiden. Überhaupt wird in allen Ableitungen mehr Gewicht auf Anschaulichkeit als auf strenge axiomatische Begründungen gelegt.