Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 3

Rubrik: Bericht

Es mögen nun die Winkel $\alpha_1 = \sphericalangle(a_1, b_1)$ und $\alpha_2 = \sphericalangle(a_2, b_2)$ vorliegen. Dann bedeute

$$\begin{Bmatrix} \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \delta = \alpha_1 - \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

einen analytischen Winkel, den man erhält, wenn man α_2 in der Ebene in Richtung und um den Betrag des Vektors $A_2 A_1$ verschiebt und dann um A_1 so weit dreht, daß $\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix}$ mit b_1 zusammenfällt. a_1 ist sein Anfangsschenkel und $\begin{Bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ sein Endschenkel.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns nun dem eingangs formulierten Problem zu (es genügt offensichtlich, die Fälle $k = 0, 1, 2, 3$ zu behandeln): der Fall $k = 0$ reduziert sich auf $f(-\alpha)$ und ergibt bekanntlich $f(-\alpha) = \begin{Bmatrix} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ ist. Dabei heißt irgendeine Funktion $\begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$, wenn sie für konträre Argumentwerte $\begin{Bmatrix} \text{gleiche} \\ \text{konträre} \end{Bmatrix}$ Werte annimmt.

Man braucht nur noch den Fall $k = 1$, und zwar $f(90° - \alpha)$ zu erledigen, um die noch verbleibenden Fälle als bloße Folgerungen hieraus zu erhalten. Betrachtet man den Winkel $\delta = 90° - \alpha$ als Differenz zweier analytischer Winkel im geschilderten Sinne und läßt man die Koordinatensysteme von δ und α zusammenfallen, so liegen die Endschenkel beider Winkel spiegelbildlich in bezug auf die Halbierende des ersten und dritten Quadranten, d.h. die Einheitspunkte dieser Endschenkel haben vertauschte Koordinaten. Daher muß $\sin\delta = \cos\alpha$ und $\cos\delta = \sin\alpha$, folglich ganz allgemein:

$$\underline{f(90° - \alpha) = \operatorname{cof}(\alpha)},$$

wobei cof das Zeichen für Kofunktion sein soll.

Folgerungen:

1. $f(90° + \alpha) = f[90° - (-\alpha)] = \operatorname{cof}(-\alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$.

2. $f(2 \cdot 90° - \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(90° - \alpha) = f(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(90° - \alpha) = -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Funktion von x ist.

Analog folgert man:

3. $f(2 \cdot 90° + \alpha) = \begin{Bmatrix} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x)$ und $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{Bmatrix}$ Charakter $\}$,

4. $f(3 \cdot 90° - \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x)$ und $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{Bmatrix}$ Charakter $\}$

aufweisen. Schließlich:

5. $f(3 \cdot 90° + \alpha) = f(-90° + \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$.

Zusammenfassend ergibt sich leicht die bekannte Beziehung:

$$|f(k \cdot 90° \mp \alpha)| = \begin{Bmatrix} |f(\alpha)| \\ |\operatorname{cof}(\alpha)| \end{Bmatrix}, \text{ wenn } k \text{ eine ganze } \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix} \text{ Zahl bedeutet.}$$

Viktor Krakowski, Zürich.

Bericht

Das Kontinuumproblem

Vortrag von P. Finsler im Mathematischen Kolloquium Winterthur vom 6. März 1950

Anläßlich der Jahrhundertwende gab Hilbert am Mathematikerkongreß in Paris einen Überblick über den Stand der mathematischen Forschung und bezeichnete 23 Probleme, deren Lösung sich den Anstrengungen der Mathematiker bisher verweigert hatte, von denen aber eine fruchtbare Entwicklung für die Zukunft zu erwarten sei. An erster Stelle seiner Reihe stand das Kontinuumproblem. Heute, nach einem halben Jahrhundert, ergibt der Rückblick, daß viele der 23 Probleme vollständig gelöst und bei den meisten andern wesentliche Fortschritte zu verzeichnen sind. Nicht so jedoch beim Kontinuumproblem. Es tritt dem Forscher heute wie vor 50 Jahren gleich undurchschaut und rätselhaft entgegen. Die Situation wird vielleicht durch nichts so gut gekennzeichnet wie durch den Ausspruch HAUSDORFFS, das Kontinuumproblem sei tabu, das heißt also, dem Menschen bleibe nur vergönnt, es von außen anzuschauen, nicht aber ins Innere einzutreten.

Tritt man näher an das Problem heran, so wird das Rätselhafte noch verstärkt: Im Gegensatz etwa zu klassischen Problemen der Antike muß das Kontinuumproblem als einfach angesprochen werden, sofern man nur auf den begrifflichen Umkreis sieht, innerhalb dessen sich die Frage stellen läßt. Jene Probleme sind in der Tat nur scheinbar einfach. Genauer besehen, involvieren sie komplizierte Begriffe, wie z. B. die Länge einer krummen Kurve und die Beschränkung der Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal. Hier dagegen läßt sich die Fragestellung auf zwei einfachste Begriffe reduzieren, auf «Teilmenge der natürlichen Zahlen» und «eindeutige Zuordnung von Dingen». Die Vorstellung des «Kontinuums» und die damit verbundene der Irrationalzahl ist nicht wesentlich. Man kann die Zahlen zwischen 0 und 1 durch ihre (unendlichen) Dualbruchentwicklungen gegeben denken und hat die Punkte des Kontinuums durch Folgen von 0 und 1 ersetzt. Denkt man eine solche unter die Reihe der natürlichen Zahlen hingeschrieben, so sind z. B. allen Einern die darüberstehenden Zahlen zugeordnet, und man erkennt, daß das Kontinuum mit der Menge der Teilfolgen aus der natürlichen Zahlenreihe äquivalent ist.

Eindeutiges Zuordnen ergibt den Vergleich von Mengen und durch Abstraktion den Begriff der Mächtigkeit. Die Methode ist eine Erweiterung dessen, was man beim gewöhnlichen Zählen schon immer tut. Im Beispiel ist die Menge der Nullen und Einer einer bestimmten Dualfolge (höchstens) gleich mächtig wie die Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. abzählbar. Die Menge aller Dualfolgen ist dagegen überabzählbar. Den Beweis ergibt das Diagonalverfahren von CANTOR: Denkt man sich die Folgen abgezählt, $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ und mit $f_n(n)$ die n-te Zahl in f_n bezeichnet, so ist die Folge $\bar{f} = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$, $z_n \equiv f_n(n) + 1 \pmod 2$, eine Dualfolge, die mit keiner der abgezählten übereinstimmt. Das Kontinuum hat also überabzählbare Mächtigkeit. Man steigt von der abzählbaren Mächtigkeit $\aleph_0$ zur Mächtigkeit c des Kontinuums auf, wenn man für jede Stelle zwei mögliche Besetzungen 0 und 1 gestattet. Das gibt $2^{\aleph_0}$ Möglichkeiten und die Beziehung

$$c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Dieses Verfahren kann für mächtigere Mengen fortgesetzt werden, und man gewinnt eine aufsteigende Reihe von Mächtigkeiten

$$m_{i+1} = 2^{m_i} > m_i.$$

Damit sind wir am Ort, wo das Kontinuumproblem sich genauer stellt:

Gibt es zwischen den Mächtigkeiten $\aleph_0$ und c eine von beiden verschiedene dritte, oder ist c die nächste auf $\aleph_0$ folgende Mächtigkeit?

Die Cantorsche Kontinuumhypothese behauptet die zweite der Alternativen (1878). Mit dem Beweise hat sich CANTOR aufgerieben. Und bis heute sind wir kaum erheblich weiter gekommen. Man hat eine Reihe äquivalenter Probleme aufgestellt, man kennt die Ungleichung $c \neq \aleph_\omega$, wo $\aleph_\omega$ eine auf Grund der transfiniten Ordnungszahlen konstruierte Mächtigkeit ist. Viel mehr weiß man nicht. Aber vielleicht ist es als ein Fortschritt anzusprechen, daß heute die Cantorsche Hypothese nicht mehr von allen Mathematikern akzeptiert ist. So wurde als 2. Hypothese $c = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$ aufgestellt (LUSIN). $\aleph_1$ ist die nächste auf $\aleph_0$ folgende Mächtigkeit.

Warum ist das Problem so schwer? Liegt vielleicht doch eine komplizierte Begriffsbildung vor, wenn man «alle möglichen» Teilmengen betrachtet? Es gibt Mathematiker, die hier die Schwierigkeit sehen wollen, und die eine Menge oder Funktion erst dann als gegeben gelten lassen, wenn für sie ein bestimmtes Bildungsgesetz gegeben wird. Das ist aber eine zu starke Einschränkung. In der Tat, läßt man nur Gesetze zu, die in endlicher Form aufgeschrieben werden können, so ist ihre Anzahl sicher abzählbar, und das ganze Kontinuumproblem fällt dahin. Künstliche Beschränkungen sind eben unzulässig, wenn man nicht Teile der Mathematik ausschalten will. So gibt es in der Mathematik sicher überabzählbar viele Sätze und zugehörige Beweise, indem schon für jede Zahl der Unterschied von algebraisch und transzendent besteht. Aber man kann sie nicht alle aufschreiben. Gibt es für das Kontinuumproblem einen Beweis, der sich aufschreiben läßt?

Beschränkungen kommen immer herein, wenn die Untersuchung in einem bestimmten logistischen System geführt wird. GÖDEL hat für ein solches nachgewiesen, daß die Cantorsche Hypothese unter bestimmten Annahmen mit ihm verträglich ist. Das ist aber weniger eine Aussage zum Problem selbst als über das zugrunde liegende System. So kann eine Behauptung durchaus wahr oder falsch sein, ohne daß innerhalb des logistischen Systems ihr Beweis formulierbar wäre[1]. Es ist die Beschränkung auf einen Formalismus, die mathematische Sätze unentscheidbar macht. Dagegen ist bewiesen, daß im absoluten Sinn keine unentscheidbaren Sätze möglich sind[2].

In theoretischer Hinsicht kann daher nicht bezweifelt werden, daß die Bemühung um das Kontinuumproblem sinnvoll ist. Aber es bleibt die Frage, was praktisch dabei zu erwarten ist, nachdem die letzten 50 Jahre so wenig Hoffnung auf eine praktische Bewältigung übrig ließen. Die Antwort kann in einem Bilde gegeben werden: Wenn man auf der Erde wandert, so kann man sich nach einem Sterne richten. Man weiß dann, man wird ihn nie erreichen. Trotzdem ist man in Bewegung auf ihn zu. Er gibt Richtung und Orientierung.

Zum Schluße des Vortrages sprach der Vortragende über eine noch nicht veröffentlichte Untersuchung, die aus solcher Orientierung entsprungen ist. Sie bezieht sich auf die in der II. Zahlklasse (Klasse der abzählbaren transfiniten Ordnungszahlen) auftretenden kritischen Zahlen, wofür als Beispiel die bekannte ε-Zahl hier genannt sei.

In der anschließenden Diskussion war Prof. FINSLER veranlaßt, ein Beispiel eines wahren, aber formal unentscheidbaren Satzes vorzutragen, welches das Interesse der Zuhörer entschieden zu fesseln vermochte. Die Finslerschen Paradigmen zum Gegensatz von absolutem und formalistischem Denken beeindrucken immer wieder durch ihre lapidare, von allem Unwesentlichen befreite Gestalt, durch die hindurch das Ausmaß der an sie gewendeten Gedankenarbeit spürbar wird und die eben dadurch die Denkkraft in so eminenter Weise herauszufordern imstande sind. G. BALASTER.

Aufgaben

Aufgabe 65. Gegeben sei eine Kugel K mit dem Radius a. Wir bezeichnen als ein *Zwerchfell* von K denjenigen Teil einer K schneidenden Kugelfläche, der sich innerhalb K befindet. Man beweise: 1. Alle Zwerchfelle durch den Mittelpunkt von K haben dieselbe Fläche. 2. Kein den Voluminhalt von K halbierendes Zwerchfell hat einen Flächeninhalt unterhalb πa^2. G. PÓLYA.

Lösung: 1. Die Mantelfläche einer Kugelkalotte kann nach der Formel $M = \pi s^2$ berechnet werden, wobei s der Abstand des Scheitels von einem Punkt des Randkreises ist (Kathetensatz!). In der Aufgabe ist dieser Abstand für alle Zwerchfelle durch den Mittelpunkt von K gleich dem Radius a. Also ist $M = \pi a^2$.

2. Soll das Volumen der gegebenen Kugel halbiert werden, so muß die Gesamthöhe h der Doppelkalotte, welche bei der Durchdringung der beiden Kugeln entsteht, die Bedingung $h \geqq a$ erfüllen. Damit ist auch $s \geqq a$ und folglich der Flächeninhalt für alle den Voluminhalt von K halbierenden Zwerchfelle $\geqq \pi a^2$. A. MARET, Biel.

[1] P. FINSLER, *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit*, Math. Z. *25*, 676 (1926).

[2] P. FINSLER, *Gibt es unentscheidbare Sätze?*, Comm. Math. Helv. *16*, 310 (1943/44).