Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 5 (1950)

Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Schließungsaufgabe*

In einer Ebene E seien zwei beliebige Kreise k_1 und k_2 vorgegeben, die sich in den beiden reellen Punkten A, B schneiden mögen. Q bezeichne irgendeinen festen Punkt in E, der auf keiner der beiden Kreislinien liegt.

Ausgehend von einem beliebigen Punkt P_0 auf der Peripherie von k_1 ($P_0 \neq A, B$) durchlaufe man einen Zug von Kreisbogen P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, ... nach der folgenden Vorschrift:

P_0P_1 gehört dem Kreis an, der durch die drei Punkte P_0, A, Q bestimmt ist, und P_1 ist der andere Schnittpunkt dieses Kreises mit k_2 (Fig. 1). Der nächste Bogen P_1P_2 gehört dem Kreis durch P_1, B, Q an, und P_2 ist der andere Schnittpunkt dieses Kreises mit k_1. Der dritte Bogen P_2P_3 führt wieder durch A und Q, der vierte P_3P_4 durch B und Q, usw.

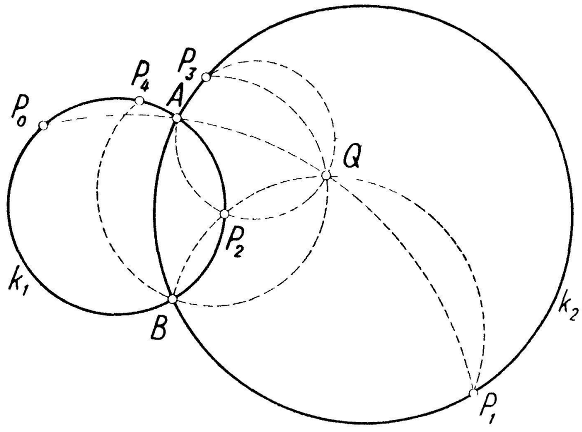


Fig. 1

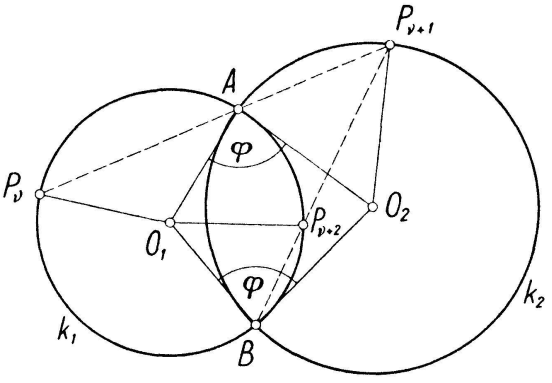


Fig. 2

Es ist gewiß überraschend, festzustellen, daß bei der Lösung der Frage, ob sich dieser Kreisbogenzug einmal schließt, ob also für ein gewisses gerades m $P_m = P_0$ wird, das Größenverhältnis der beiden Kreisradien und die Lage des Ausgangspunktes P_0 keine Rolle spielen. Es kommt dabei lediglich auf die Größe des Schnittwinkels der beiden Kreise an, worüber der folgende Satz genauere Auskunft gibt:

Notwendige und hinreichende Bedingung für den Schluß des Kreisbogenzuges ist, daß der Winkel, unter dem sich die beiden Kreise schneiden, mit π kommensurabel ist.

Beweis: Es liegt nahe, die ganze Figur einer Inversion an einem Kreis mit Q als Zentrum zu unterwerfen. k_1 und k_2 gehen dabei in zwei neue Kreise über, die sich unter dem gleichen Winkel schneiden, und das Kreisbüschel durch Q bildet sich in gerade Linien ab. Somit ist klar, daß es genügt, unsere Behauptung für den speziellen Fall eines «eingeschriebenen» Streckenzuges ($Q = \infty$) zu beweisen.

Zu allen Punkten des Streckenzuges $P_0P_1P_2\ldots$ denken wir uns die zugeordneten Kreisradien $O_1P_{2\mu}$ bzw. $O_2P_{2\mu+1}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$) gezogen. Die Vektoren $\overrightarrow{O_1P_{2\mu}}$ bzw. $\overrightarrow{O_2P_{2\mu+1}}$ wollen wir der Kürze halber die Zeiger der betreffenden Punkte P nennen.

Das Kernstück unseres kurzen Beweises wird die Erkenntnis sein, daß beim Übergang von P_ν zu $P_{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) der zugeordnete Zeiger sich im negativen Sinne um einen festen Winkel dreht, der gerade gleich dem Schnittwinkel der beiden Kreise ist. Diese Erkenntnis ist leicht zu gewinnen: Einer der beiden sich zu 180° ergänzenden Winkel, unter denen sich k_1 und k_2 schneiden, ist der Winkel $+\varphi$, den die Vektoren $\overrightarrow{O_1A}$ und $\overrightarrow{O_2A}$ (in dieser Reihenfolge) miteinander bilden (Fig. 2). Denkt man sich jetzt die

Zeiger von P_ν und $P_{\nu+1}$ an irgendeiner auf der Strecke $P_\nu P_{\nu+1}$ senkrecht stehenden Geraden gespiegelt, so lassen sich diese Spiegelbilder durch Translation je in einen der beiden Zeiger des Punktes A überführen. Da bei dieser Spiegelung ein Winkel sein Vorzeichen ändert, müssen die Zeiger von P_ν und $P_{\nu+1}$ also den Winkel $-\varphi$ miteinander einschließen.

Auch die Vektoren $\overrightarrow{O_2B}$ und $\overrightarrow{O_1B}$ (in dieser Reihenfolge) schließen den Winkel $+\varphi$ ein, und daher wird der Zeiger von $P_{\nu+2}$ wiederum um den Winkel $-\varphi$ gegenüber seinem Vorgänger, dem Zeiger von $P_{\nu+1}$, gedreht sein, usw. Soll sich der Streckenzug schließen, was nur nach einer geraden Anzahl von Schritten möglich ist, so muß offenbar gelten:

$$2\,m\cdot\varphi = n\cdot 2\,\pi \qquad (m,\ n = \text{ganze positive Zahlen})$$

oder

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{n}{m},$$

womit der Beweis erbracht ist.

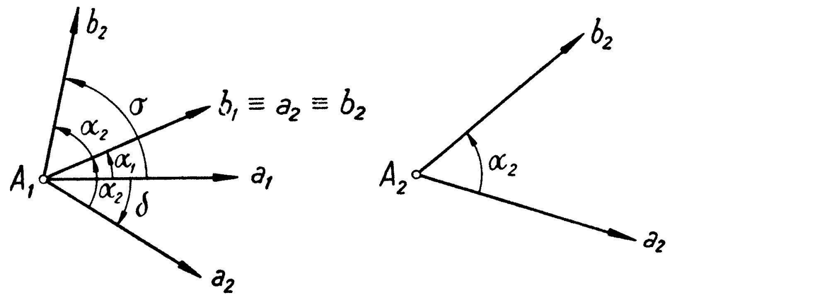
Besonderer Erwähnung bedarf noch der zunächst undurchsichtig erscheinende Fall, daß ein Kreisbogen $P_\nu P_{\nu+1}$ (oder in unserem Spezialfall eine Strecke $P_\nu P_{\nu+1}$) des Zuges $P_0P_1P_2\ldots$ einen der Kreise k_1, k_2 berührt, so daß also $P_{\nu+1}$ mit A oder B zusammenfällt. Nehmen wir an, P_ν sei ein Punkt von k_1 und $P_{\nu+1}$ falle mit A zusammen. Der Punkt $P_{\nu+2}$ ist dann offenbar auch identisch mit A. Eine elementare Stetigkeitsbetrachtung zeigt, daß man jetzt, um $P_{\nu+3}$ zu erhalten, A tangential zu k_1 verlassen und diesen Bogen (bzw. diese Strecke) mit k_2 schneiden muß. R. CONZELMANN, Basel.

II. *Herleitung der Quadrantenrelationen in der Goniometrie*

Es handelt sich um das Problem:

Wie kann man, unter f ein goniometrisches Funktionszeichen verstanden, $f(k\cdot 90^\circ \mp \alpha)$ durch eine goniometrische Funktion von α allein ausdrücken, wie groß auch α sein mag?

Dabei ist α als «analytischer» Winkel gedacht, d. h. als Winkel, der durch Drehung entstanden zu denken ist und von dessen Schenkeln der eine als Anfangs-, der andere als Endschenkel gekennzeichnet sein muß. Seine «Entstehungsgeschichte» soll durch



einen «gepfeilten» Bogen wiedergegeben werden. Die bloße Angabe von Anfangs- und Endschenkel bestimmt den analytischen Winkel bis auf ganzzahlige Vielfache von 360°, was für unsere Zwecke genügt.

Bekanntlich gibt die Abszisse bzw. Ordinate des Einheitspunktes (Punkt mit Abstand 1 vom Scheitel) des Endschenkels von α definitionsgemäß $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, wenn man den Anfangsschenkel zur positiven Abszissenachse, den Scheitel zum Nullpunkt und die positive Ordinatenachse auf übliche Weise wählt, d. h. so, daß eine Drehung der positiven Abszissenachse um $+90^\circ$ diese in die positive Ordinatenachse überführt. Insofern darf man sagen, daß mit jedem analytischen Winkel ein Achsenkreuz in geschilderter Weise verknüpft ist, und dieses wiederum rechtfertigt zugleich die Wahl des Namens «analytischer» Winkel[1]).

---

[1]) Siehe: A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1945), S. 115–118.

Es mögen nun die Winkel $\alpha_1 = \sphericalangle(a_1, b_1)$ und $\alpha_2 = \sphericalangle(a_2, b_2)$ vorliegen. Dann bedeute

$$\begin{Bmatrix} \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \delta = \alpha_1 - \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

einen analytischen Winkel, den man erhält, wenn man α_2 in der Ebene in Richtung und um den Betrag des Vektors $A_2 A_1$ verschiebt und dann um A_1 so weit dreht, daß $\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix}$ mit b_1 zusammenfällt. a_1 ist sein Anfangsschenkel und $\begin{Bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ sein Endschenkel.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns nun dem eingangs formulierten Problem zu (es genügt offensichtlich, die Fälle $k = 0, 1, 2, 3$ zu behandeln): der Fall $k = 0$ reduziert sich auf $f(-\alpha)$ und ergibt bekanntlich $f(-\alpha) = \begin{Bmatrix} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ ist. Dabei heißt irgendeine Funktion $\begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$, wenn sie für konträre Argumentwerte $\begin{Bmatrix} \text{gleiche} \\ \text{konträre} \end{Bmatrix}$ Werte annimmt.

Man braucht nur noch den Fall $k = 1$, und zwar $f(90° - \alpha)$ zu erledigen, um die noch verbleibenden Fälle als bloße Folgerungen hieraus zu erhalten. Betrachtet man den Winkel $\delta = 90° - \alpha$ als Differenz zweier analytischer Winkel im geschilderten Sinne und läßt man die Koordinatensysteme von δ und α zusammenfallen, so liegen die Endschenkel beider Winkel spiegelbildlich in bezug auf die Halbierende des ersten und dritten Quadranten, d. h. die Einheitspunkte dieser Endschenkel haben vertauschte Koordinaten. Daher muß $\sin\delta = \cos\alpha$ und $\cos\delta = \sin\alpha$, folglich ganz allgemein:

$$\underline{f(90° - \alpha) = \operatorname{cof}(\alpha),}$$

wobei cof das Zeichen für Kofunktion sein soll.

Folgerungen:

1. $f(90° + \alpha) = f[90° - (-\alpha)] = \operatorname{cof}(-\alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$.

2. $f(2 \cdot 90° - \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(90° - \alpha) = f(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(90° - \alpha) = -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Funktion von x ist.

Analog folgert man:

3. $f(2 \cdot 90° + \alpha) = \begin{Bmatrix} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x)$ und $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{Bmatrix}$ Charakter $\Big\}$,

4. $f(3 \cdot 90° - \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x)$ und $\operatorname{cof}(x) \begin{Bmatrix} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{Bmatrix}$ Charakter $\Big\}$

aufweisen. Schließlich:

5. $f(3 \cdot 90° + \alpha) = f(-90° + \alpha) = \begin{Bmatrix} \operatorname{cof}(\alpha) \\ -\operatorname{cof}(\alpha) \end{Bmatrix}$, wenn $f(x) \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$.

Zusammenfassend ergibt sich leicht die bekannte Beziehung:

$$|f(k \cdot 90° \mp \alpha)| = \begin{Bmatrix} |f(\alpha)| \\ |\operatorname{cof}(\alpha)| \end{Bmatrix}, \text{ wenn } k \text{ eine ganze} \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix} \text{ Zahl bedeutet.}$$

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

Bericht

Das Kontinuumproblem

Vortrag von P. FINSLER im Mathematischen Kolloquium Winterthur vom 6. März 1950

Anläßlich der Jahrhundertwende gab HILBERT am Mathematikerkongreß in Paris einen Überblick über den Stand der mathematischen Forschung und bezeichnete 23 Probleme, deren Lösung sich den Anstrengungen der Mathematiker bisher verweigert