Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 1

Artikel: Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points

Autor: Sierpiski, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14901

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band V Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 15. Januar 1950

Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points

1° – Deux ensembles de points (figures géométriques) situés sur une droite (c.-à-d. linéaires) ou dans un plan ou dans l'espace à trois dimensions sont dits *congruents* ou *superposables*, s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par une translation ou par une rotation. On écrit $A \simeq B$ pour exprimer que les ensembles de points A et B sont congruents.

Voici un problème concernant la congruence des ensembles qui semble être tout à fait élémentaire, mais dont je ne connais la solution que dans le cas des ensembles linéaires:

E étant un ensemble de points quelconque, peut-on toujours enlever un point de E de sorte que l'ensemble qui restera ne soit pas congruent avec E?

Je sais démontrer que c'est le cas pour les ensembles E linéaires[1]), mais je ne sais pas si cela subsiste pour tous les ensembles infinis plans (ou situés dans l'espace à trois dimensions).

Pour les ensembles linéaires, la proposition suivante (dont une conséquence immédiate est la solution positive de notre problème dans le cas des ensembles linéaires) est vraie:

E étant un ensemble de points quelconque situé sur une droite, il existe au plus un point p de E tel que l'ensemble qu'on obtient en écartant de E le point p soit congruent à E.

On peut démontrer que ce n'est pas vrai, en général, pour les ensembles E plans, mais la démonstration est assez difficile. On peut, en effet, définir un ensemble plan E dans lequel il existe deux points distincts p et q, tels qu'en enlevant de E un de ces deux points, on obtient un ensemble congruent à E[2]).

2° – On peut construire un ensemble plan non borné (c.-à-d. qui ne peut pas être enfermé dans un cercle au rayon fini) qui se décompose en deux ensembles sans points communs dont chacun est congruent avec lui[3]). On peut aussi construire un

[1]) La démonstration élémentaire de ce théorème paraîtra dans le vol. 37 du journal *Fundamenta Mathematicae.*

[2]) La construction d'un tel ensemble E a été présentée par moi au Congrès des mathématiciens polonais et tchécoslovaques tenu à Prague en septembre 1949; elle paraîtra dans le vol. 37 des *Fundamenta Mathematicae.*

[3]) Voir: S. MAZURKIEWICZ et W. SIERPIŃSKI, C. r. Acad. Sci. Paris *158*, 618 (1914) (note du 2 mars); aussi Comment. Math. Helv. *19*, 215–216 (1946/47).

ensemble plan non borné qui se décompose en une infinité d'ensembles sans points communs deux à deux dont chacun est congruent avec lui[1]).

On peut démontrer qu'il n'existe aucun ensemble linéaire ou plan borné jouissant de ces propriétés[2]), mais il existe de tels ensembles bornés dans l'espace à trois dimensions (dont la construction n'est d'ailleurs pas facile).

3° — Il est facile à démontrer que la droite peut être décomposée en une suite infinie d'ensembles deux à deux congruents et sans points communs (par exemple chacun étant un segment dépourvu de son extrémité droite). Il est cependant beaucoup plus difficile à démontrer qu'il existe une décomposition d'un segment de droite en une suite infinie d'ensembles deux à deux congruents et sans points communs. M. J. VON NEUMANN a donné une telle démonstration (assez longue d'ailleurs) en utilisant l'axiome du choix[3]); cependant, on ne sait pas définir effectivement une telle décomposition de la droite.

On peut démontrer que le plan peut être recouvert par des segments de droite (contenant ses extrémités) sans points communs deux à deux et ayant tous la même longueur.

4° — On démontre que si E est un ensemble linéaire ne contenant pas tout les points de la droite, alors il existe une infinité d'ensembles linéaires distincts dont chacun est superposable par translation avec E[4]).

A l'aide de l'axiome du choix, on peut démontrer l'existence d'un ensemble linéaire E et d'une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles linéaires sans points communs deux à deux et tels que tout ensemble superposable avec E est un des ensembles de cette suite et inversement[5]). Il est cependant impossible, à l'état actuel de la science, de définir effectivement un tel ensemble E.

On ne sait pas s'il existe un ensemble linéaire (non borné) E et une suite infinie d'ensembles linéaires telle que tout ensemble semblable à E au sens de la géométrie élémentaire soit un des ensembles de cette suite.

On ne sait pas non plus s'il existe un ensemble plan E et une suite infinie d'ensembles plans distincts tels que tout ensemble plan superposable par translation ou par rotation avec E soit un des ensembles de cette suite et inversement.

5° — Dans la géométrie élémentaire, on appelle deux polygones (ou polyèdres) *équivalents par décomposition*, s'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal de polygones (ou polyèdres) respectivement congruents qui n'ont pas de points intérieurs communs. Dans ce sens, par exemple, chaque triangle est équivalent par décomposition en trois parties à un rectangle, et chaque rectangle est équivalent par décomposition à un carré, mais ici le nombre des parties en lesquelles il faut décomposer le rectangle pour en former le carré dépend de ce rectangle et peut être très grand lorsque le rectangle est très étroit.

Dans la théorie des ensembles de points on dit que deux ensembles A et B sont *équivalents par décomposition en n parties*, s'ils peuvent être décomposés chacun en n ensembles arbitraires sans points communs deux à deux et respectivement con-

---

1) Voir ma note dans Fund. Math. *34*, 9 (1947).

2) Voir A. LINDENBAUM, Fund. Math. *8*, 218 (1928) (renvoi 1).

3) J. VON NEUMANN, Fund. Math. *11*, 230–238 (1928).

4) W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. *35*, 159 (1948).

5) C'est un cas particulier d'une proposition plus générale que j'ai démontré (à l'aide de l'axiome du choix) dans Fund. Math. *35*, 161 (1948).

gruents. On écrit alors $A \underset{n}{=} B$. Cela signifie donc qu'il existe une décomposition de l'ensemble A en n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sans points communs deux à deux, et une décomposition de l'ensemble B en n ensembles $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sans points communs deux à deux, tels que $A_k \simeq B_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si chacun de deux ensembles de points A et B est congruent à une partie de l'autre, les ensembles A et B ne sont pas nécessairement congruents, mais on peut démontrer qu'ils sont équivalents par décomposition en deux parties[1]).

On démontre que la droite est équivalente par décomposition en deux parties à l'ensemble qu'on obtient en enlevant de la droite un ensemble borné quelconque[2]).

a et b étant deux nombres réels quelconques, l'ensemble A de tous les points de la droite aux abscisses rationnelles $< a$ et l'ensemble B de tous les points de la droite aux abscisses rationnelles $< b$ sont équivalents par décomposition en deux parties[3]).

La relation $\underset{2}{=}$ n'est pas transitive, c.-à-d. il existe trois ensembles A, B et C tels que $A \underset{2}{=} B$ et $B \underset{2}{=} C$, mais qu'on n'a pas $A \underset{2}{=} C$. Tel est, par exemple, le cas où l'ensemble A est formé de quatre points de la droite aux abscisses 1, 2, 3 et 4, ce que nous écrirons plus court: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ensuite $B = \{1, 2, 5, 6\}$ et $C = \{1, 5, 9, 13\}$. On n'a pas ici ni $A \underset{2}{=} C$, ni $A \underset{3}{=} C$.

Or, on démontre facilement que si X, Y et Z sont des ensembles de points tels que $X \underset{2}{=} Y$ et $Y \underset{2}{=} Z$, on a $X \underset{4}{=} Z$.

Or, même pour les ensembles formés d'un nombre fini de points d'une droite, je ne sais pas résoudre le problème suivant:

A et C étant deux ensembles tels que $A \underset{3}{=} C$, existe-t-il toujours un ensemble B tel que $A \underset{2}{=} B$ et $B \underset{2}{=} C$?

Pendant mon séjour aux Indes, cette année, où j'ai donné une série de conférences à l'Université de Lucknow, un de mes auditeurs, M. A. SHARMA, a résolu positivement ce problème pour les ensembles linéaires formés de 7 ou moins points. Mais déjà pour les ensembles formés de 8 points d'une droite, le problème n'est pas résolu et semble être difficile.

6° — S'il existe pour deux ensembles A et B un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} B$, on dit que les ensembles A et B sont *équivalents par décomposition finie.*

On peut démontrer qu'un ensemble linéaire borné dont tous les points ont des abscisses rationnelles n'est équivalent par décomposition finie à aucune de ses parties aliquotes[4]).

On démontre aussi que tout ensemble infini de points contient un ensemble infini auquel il n'est pas équivalent par décomposition finie[5]).

On peut démontrer que chaque triangle est équivalent par décomposition finie à un rectangle, mais la démonstration diffère de celle de la proposition analogue de la géométrie élémentaire, où l'on attribue à l'équivalence par décomposition un autre sens.

Plus généralement on peut démontrer que, pour que deux polygones (situés dans un plan) soient équivalents par décomposition finie, il faut et il suffit qu'ils aient la

---

[1]) Voir S. BANACH, Fund. Math. *6*, 239 (1924).
[2]) Voir ma note dans Fund. Math. *35*, 151 (1948).
[3]) L. c., p. 155.
[4]) Voir ma note dans Fund. Math. *36*, 4 (1949).
[5]) L. c., p. 1.

même aire (et il est à remarquer que la nécessité de cette condition est beaucoup plus difficile à démontrer que la suffisance)[1].

Il en est cependant tout autrement pour les polyèdres, où on peut démontrer (à l'aide de l'axiome du choix) que deux polyèdres quelconques (même ayant des volumes différents) sont équivalents par décomposition finie[2].

Aussi la sphère solide est équivalente par décomposition finie à un cube. Or, le problème reste ouvert quel est le plus petit nombre naturel n pour lequel la sphère solide est $\underset{n}{=}$ à un cube.

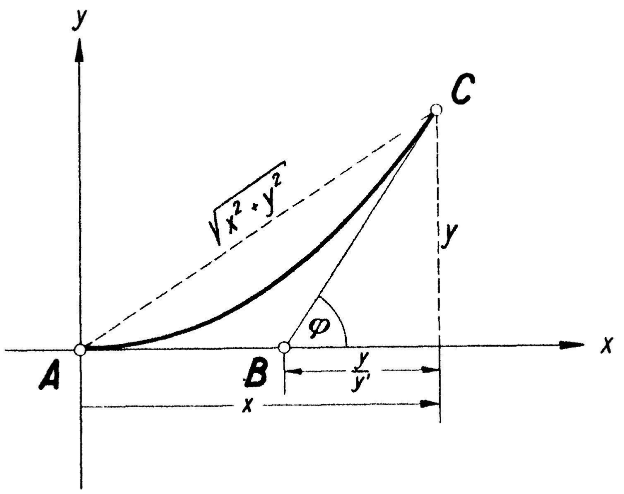
Cependant on ne sait pas si le cercle (l'intérieur et la circonférence) est équivalent par décomposition finie à un carré de même surface (ainsi, dans ce sens, le problème de la quadrature du cercle n'est pas encore résolu).

On peut démontrer qu'une sphère solide S peut être décomposée en 5 parties sans points communs deux à deux dont 2 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères solides sans points communs de même rayon que la sphère S[3]. Le nombre 5 ne peut pas être remplacé ici par un nombre plus petit. (Les mots «peut être décomposée» doivent être pris ici dans le sens idéaliste: l'existence des ensembles en lesquels on décompose la sphère est démontrée à l'aide de l'axiome du choix et on ne sait pas les définir effectivement).

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Über die Rektifikation eines Kurvenbogens

Ergebnis: Für die Länge eines monoton gekrümmten Kurvenbogens AsC (siehe Figur) ist die zugehörige Sehne AC ein zu kleiner Näherungswert. Die Summe



$AB + BC$ der Abschnitte beider Tangenten in den Endpunkten A und C dagegen

[1]) S. BANACH et A. TARSKI, Fund. Math. *6*, 260 (1924).

[2]) L. c., p. 263.

[3]) R. M. ROBINSON, Fund. Math. *34*, 246 (1947). Ce résultat a été précédé par des autres, où le nombre 5 a été remplacé par un nombre plus grand: voir S. BANACH et A. TARSKI, Fund. Math. *6*, 262 (1924) (Lemme 22). – J. VON NEUMANN, Fund. Math. *13*, 77 (1929). – W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. *33*, 299 (1945); et aussi Fund. Math. *35*, 157 (1948).