Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine passende untere Zungen-1 wird der *kleineren* Kathete $b = 3$ gegenübergestellt und der Läufer über die andere Kathete $a = 4$ geschoben (1. Lage). Auf der oberen Zungenteilung erscheint dann $(a/b)^2 = 1{,}78$, zu welchem Wert jetzt im Kopf 1 addiert wird. Der Läufer wird nunmehr über dieses Zwischenergebnis $(a/b)^2 + 1 = 2{,}78$ geschoben (2. Lage), worauf auf der unteren Stabteilung das Ergebnis

$$b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = c = 5$$

abzulesen ist. Die auf dem Rechenschieber nicht durchführbare Addition zweier beliebiger Zahlen ist ersichtlich in die einfache Addition einer 1 umgeformt worden, die nun leicht in der angegebenen Weise ausgeführt werden kann. — Noch ein Beispiel zum Minuszeichen unter der Wurzel: es sei $\sqrt{17^2 - 8^2}$ $(= 15)$ zu berechnen (Fig. 2).

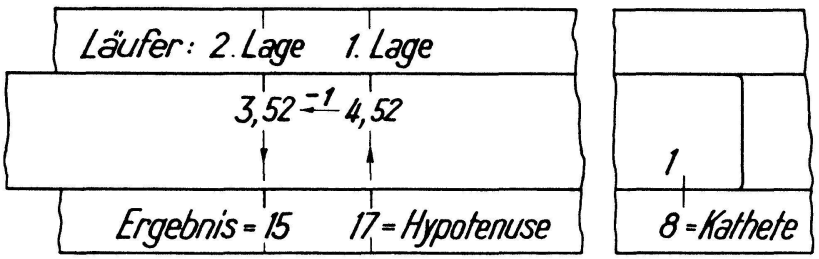


Fig. 2

Das Verfahren dürfte wohl ohne weiteres verständlich sein; das Zwischenergebnis 4,5· braucht dabei nicht einmal zahlenmäßig genau ausgedrückt zu werden, sondern es genügt, sich den letzten Bruchteil nach Augenmaß zu merken, da er ja sogleich auf die Einstellung von 3,5· übertragen wird. ERICH SPONDER, Paris.

Aufgaben

Aufgabe 49. Wir betrachten drei Vektoren mit demselben Ausgangspunkt O und den Längen a, b und c beziehungsweise. Es sei K das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem die gegebenen Vektoren die Kanten, und H das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem diese Vektoren die Höhen sind. Man beweise, daß das Produkt der Voluminhalte von H und K $(a\,b\,c)^2$ beträgt und verallgemeinere diesen Satz mit Beweis auf n Dimensionen. G. PÓLYA (Stanford, USA.).

1. Lösung: Der entsprechende Satz für den R_n lautet: Das Parallelepiped H werde durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ aufgespannt, die gleichzeitig die Höhen eines zweiten Parallelepipeds K sind. Das Produkt der Voluminhalte von H und K beträgt $(|\mathfrak{a}_1| \ldots |\mathfrak{a}_n|)^2$. Beweis: K werde durch die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ aufgespannt. Da die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ die Höhen von K sind, gilt für das Skalarprodukt je zweier Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ bei geeigneter Numerierung dieser letztern (die Projektion von $\mathfrak{b}_i$ auf $\mathfrak{a}_i$ ist $\mathfrak{a}_i$!):

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ |\mathfrak{a}_i|^2 & \text{für} \quad i = j. \end{cases} \qquad (*)$$

Das Volumen von H läßt sich darstellen durch die Determinante A, deren Zeilen die (skalaren) Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ sind, das Volumen von K durch die Determinante B^*, deren Spalten die Komponenten der $\mathfrak{b}_j$ sind. Das Produkt der beiden Determinanten $P = AB^*$ ist die Determinante mit dem allgemeinen Glied $p_{ij} = \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j$. Sie hat nach (*) den Wert

$$P = |\mathfrak{a}_1|^2 \ldots |\mathfrak{a}_n|^2 = (|\mathfrak{a}_1| \ldots |\mathfrak{a}_n|)^2, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

W. GYSIN (Zug).

2. Lösung: 1. Im zweidimensionalen Falle ist der zu beweisende Satz fast trivial. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei im gleichen Punkt entspringende Vektoren mit den Längen a und b, und sei β der spitze Winkel zwischen $\mathfrak{b}$ und einer Normalen zu $\mathfrak{a}$. Dann ist die Fläche des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogrammes $\mathfrak{K}$ gleich $a\,b/\cos\beta$. Im Parallelogramm $\mathfrak{H}$, in dem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Höhen sind, haben die zu $\mathfrak{a}$ normalen Seiten die Länge $b/\cos\beta$, so daß seine Fläche gleich $a\,b/\cos\beta$ ist. Somit wird das Produkt der beiden Flächen gleich $(a\,b)^2$.

2. Im dreidimensionalen Raum seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ drei ein Parallelepiped $\mathfrak{K}$ aufspannende Vektoren mit den Längen a, b und c. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ spannen ein Parallelogramm $\mathfrak{G}$ auf mit der Fläche G. Bezeichnet γ den spitzen Winkel zwischen $\mathfrak{c}$ und einer Normalen zu $\mathfrak{G}$, dann ist das Volumen von $\mathfrak{K}$ gegeben durch $G\,c\cos\gamma$. Im Parallelepiped $\mathfrak{H}$, in dem die drei Vektoren die Höhen sind, sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zugleich Höhen in einem parallelogrammatischen Normalschnitt $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ mit der Fläche N, und die zu $\mathfrak{N}$ normalen Kanten von $\mathfrak{H}$ haben die Länge $c/\cos\gamma$. Daher ist das Volumen von $\mathfrak{H}$ gleich $N\,c/\cos\gamma$, und das Produkt der Volumina von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ wird $GN\,c^2$. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ stehen aber im Zweidimensionalen genau in der Beziehung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$, so daß nach 1. $GN = (a\,b)^2$ ist. Damit ist der Satz für den Raum bewiesen.

3. Nun sei der Satz für $n-1$ Dimensionen bewiesen, $n > 3$. $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{i}$ seien $n-1$ linear unabhängige Vektoren mit den Längen a bis i. Sie spannen als Kanten ein $(n-1)$-dimensionales Parallelepiped $\mathfrak{G}$ mit dem Volumen G auf und bilden als Höhen ein $(n-1)$-dimensionales Parallelepiped $\mathfrak{N}$ mit dem Volumen N, und es gelte $GN = (a\ldots i)^2$. $\mathfrak{k}$ sei ein weiterer von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{i}$ linear unabhängiger Vektor mit der Länge k und bilde mit einer Normalgeraden zu $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{N}$ den Winkel $\varkappa$. $\mathfrak{k}$ spannt als Kante zusammen mit $\mathfrak{G}$ ein n-dimensionales Parallelepiped $\mathfrak{K}$ auf, von dem $\mathfrak{G}$ eine Grundfläche ist und $k\cos\varkappa$ die zugehörige Höhe. Als Höhe bildet $\mathfrak{k}$ zusammen mit $\mathfrak{N}$ ein n-dimensionales Parallelepiped $\mathfrak{H}$, von dem $\mathfrak{N}$ ein Normalschnitt ist, und dessen Kanten normal zu $\mathfrak{N}$ die Länge $k/\cos\varkappa$ haben. Dementsprechend ist das Volumen K von $\mathfrak{K}$ gegeben durch $G\,k\cos\varkappa$, und das Volumen H von $\mathfrak{H}$ ist gleich $N\,k/\cos\varkappa$. Somit wird $KH = GN\,k^2 = (a\ldots i\,k)^2$. Da die Induktionskette für $n = 2$ und 3 bereits verankert ist, ist damit der Satz allgemein bewiesen. A. Stoll (Zürich).

Weitere Lösungen mit Determinanten gingen ein von J. Binz (Biel), W. Kissel (Zürich), H. Ruch (Bottmingen), B. Schenker (Fetan).

Aufgabe 51. Ist es möglich, eine Kreisscheibe in zwei zueinander fremde kongruente Punktmengen zu zerlegen?

(Ob man den Randkreis zur Kreisscheibe rechnet oder nicht, ist gleichgültig. Das einfachste ist, den Randkreis dazu zu rechnen.) B. L. van der Waerden (Laren, Holland).

Lösung: Behauptung: Es ist unmöglich, eine Kreisscheibe in zwei zueinander fremde kongruente Punktmengen zu zerlegen.

Beweis indirekt: Es liege eine Zerlegung der abgeschlossenen Kreisscheibe K in die zueinander fremden kongruenten Punktmengen M und N vor. Seien m der Mittelpunkt und S der Randkreis von K, r der Radius von S. m gehöre zu M und $n \neq m$ sei der entsprechende Punkt in N. Wir setzen $\overline{mn} = 2\,e$. Da alle Punkte der Menge M von m höchstens den Abstand r besitzen, haben alle Punkte der Menge N von n höchstens den Abstand r. Wir ziehen um n den Kreis T mit dem Radius r. Nach dem Gesagten muß N ganz in dem durch S und T gebildeten Kreiszweieck Z liegen, welches die Punkte m und n enthält. Der außerhalb Z liegende Teil von K gehört somit ganz zu M, insbesondere der nicht zu Z gehörende Bogen von S. Dieser Bogen übertrifft aber den Halbkreis. Es gilt also, im Widerspruch zur Beweisannahme, für die Durchmesser der Mengen M und N:

$$\varrho(M) = 2\,r > 2\sqrt{r^2 - e^2} \geqq \varrho(N).$$

Dieser Beweis gilt fast bis zum Schluß auch für den Fall, daß K die offene Kreisscheibe bedeutet. An Stelle des «nicht zu Z gehörenden Bogens von S» tritt dagegen der entsprechende Bogen eines Parallelkreises vom Radius $r - \delta$, wo $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. W. Gysin (Zug).

Eine weitere Lösung sandte J. M. Ebersold (St. Gallen).

Herr D. PUPPE (Göttingen) weist darauf hin, daß allgemeiner ein *abgeschlossener* ebener Eibereich B sich nicht in zwei zueinander fremde *gleichsinnig* kongruente Punktmengen M_1 und M_2 zerlegen läßt. Zum Beweis betrachte man die Bewegung, die M_1 in M_2 überführt. Sie ist entweder eine Rotation mit einem außerhalb B liegenden Zentrum Z oder eine Translation parallel einer Geraden g, die außerhalb B verlaufen soll. In M_1 liege derjenige eindeutig bestimmte Punkt von B, der von Z bzw. g den kleinsten Abstand hat. Da dieser Abstand bei der Bewegung unverändert bleibt, müßte auch in M_2 ein Punkt mit minimalem Abstand liegen, was unmöglich ist.

Aufgabe 52. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Une droite variable passant par A coupe BC en E et CD en F, et soit I le point défini par la relation

$$(BCIE) = k. \qquad (k = \text{const})$$

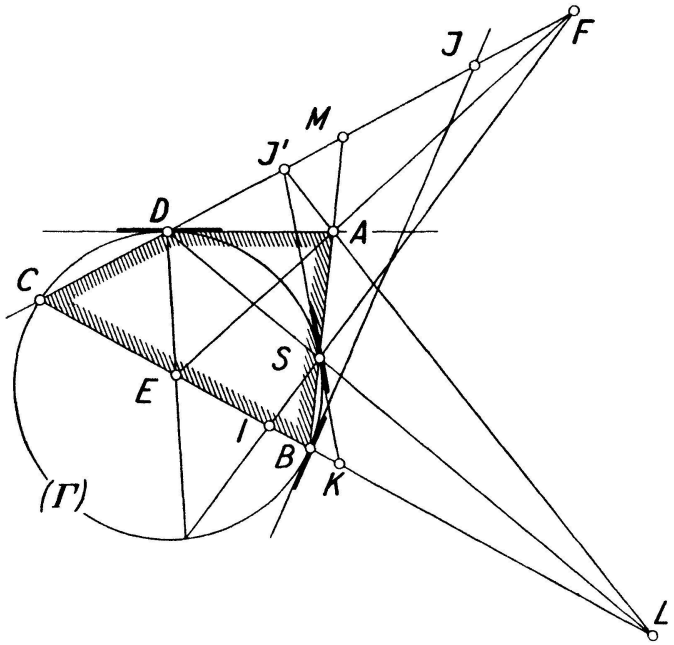
1° Le lieu du point commun aux droites DE, IF est une conique (Γ). 2° La conique (Γ) passe par C, étant tangente en D à AD; elle passe encore par B, la tangente en ce point coupe CD en un point J tel que

$$(JCMD) = k \text{ [1]}$$

M étant le point d'intersection des droites AB, CD.
3° La polaire du point commun aux droites BJ, AD est la droite BD.

GH. TH. GHEORGHIU, (Timişoara, Rumänien).

Solution: Les ponctuelles (F) et (I) sont projectives. Si $F = C$, $I = C$; ces ponctuelles sont donc perspectives. Soit S leur centre de perspectivité. S est sur AB, car si E vient en B, F vient en M. Le lieu cherché est l'intersection des rayons homologues des



faisceaux obtenus en projetant E de D et F de S. C'est donc une conique passant par S, D et C. Si F est en D, E est sur la droite DA qui est la tangente en D. Si F est en M, E est en B. B est donc aussi sur la conique.

Soit L le point d'intersection de DS et de BC et soit K le point de BC tel que $(BCKL) = k$. Les droites AL et KS se coupent sur CD, par définition de S, donc KS est la tangente en S. Comme $S(BCKL) = k$, on a, sur la conique, $(BCSD) = k$, donc $B(BCSD) = k$, c'est-à-dire, en coupant ces quatre rayons par CD: $(JCMD) = k$.

[1]) In der Aufgabe wurde irrtümlicherweise $(JDMC) = k$ angegeben.

Le point J' tel que $(J'DMC) = k$ est le point d'intersection avec DC de la tangente en S, point de AB tel que $(SABM) = k$, comme on le voit en projetant $(BCIE)$ de F sur AB.

La propriété 3) dépend trivialement de 2). J.-P. SYDLER (Zürich).

Eine rechnerische Lösung sandte J. BINZ (Biel).

Aufgabe 53. Ein Parallelogramm mit den Seiten a und b und dem spitzen Winkel α kann auf zwei Arten zur Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders zusammengerollt werden, je nachdem a oder b zum Umfang des Zylinders gewählt wird. Die entsprechenden Volumina der Zylinder sind

$$V_1 = \frac{F\,a}{4\,\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad V_2 = \frac{F\,b}{4\,\pi}.$$

F ist die Fläche des Parallelogramms. Die Steigungswinkel der Schraubenlinien sind gleich α. A. HESS (Zürich).

Lösung: Es sei h_1 bzw. h_2 die Höhe des Zylinders, wenn a bzw. b der Umfang ist, so daß $F = a\,h_1 = b\,h_2$. Man findet für die entsprechenden Volumina

$$V_1 = \left(\frac{a}{2\,\pi}\right)^2 \pi\,h_1 = \frac{F\,a}{4\,\pi}, \qquad V_2 = \left(\frac{b}{2\,\pi}\right)^2 \pi\,h_2 = \frac{F\,b}{4\,\pi}.$$

E. ROTHMUND (Zürich).

Aufgabe 54. Aus einem rechteckigen Stück Blech (a = Grundlinie, h = Höhe, $a > h$) soll ein längs einer Schraubenlinie geschweißtes Rohr von kreisrundem Querschnitt und dem Umfang u ($h < u < \sqrt{a^2 + h^2}$)[1]) hergestellt werden. Man berechne die Höhe H des Rohres.

Schneidet man von dem Blech an beiden schmalen Seiten rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse u und einer Kathete h ab, dann findet man

$$H = \frac{h}{u}\left(a - \sqrt{u^2 - h^2}\right).$$

Will man das Blech voll ausnützen, dann schneidet man nur an einem Ende ein Dreieck ab und fügt es am andern Ende wieder an. Dann wird

$$H' = \frac{h\,a}{u}.$$

Man kann auch das gegebene Blechstück in n kongruente Rechtecke mit den Seiten u und h zerlegen und diese n Stücke zu einem Rohr zusammenschweißen, allerdings nicht mehr längs einer Schraubenlinie. Dann wird

$$H'' = \frac{h\,a'}{u}, \qquad \text{worin} \qquad a' = n\,u.$$

Es ist $0 \leqq a - a' < u$ und somit $H'' \leqq H'$. A. HESS (Zürich).

Lösung: Die gesuchte Höhe H ist, entsprechend der Aufgabe 53, gleich dem Abstand der beiden Hypotenusen u, also ist

$$u\,H = a\,h - h\sqrt{a^2 - h^2} \qquad \text{bzw.} \qquad u\,H' = h\,a.$$

E. ROTHMUND (Zürich).

Aufgabe 55. Legt man durch die Ecken eines Dreiecks je n gerade Schnittlinien, so läßt sich leicht die maximale Anzahl der dadurch entstehenden Teile angeben (Aufgabe 39). Man ermittle deren minimale Anzahl. A. STOLL (Zürich).

---

[1]) In der Aufgabe stand irrtümlicherweise a an Stelle von $\sqrt{a^2 + h^2}$.

Solution: On obtient le nombre maximum des parties lorsque trois droites quelconques issues respectivement des trois sommets A, B, C du triangle ne sont pas concourantes. Si le nombre des droites issues de chaque sommet est n, le nombre maximum des parties est $3n^2 + 3n + 1$ (voir la solution du problème 39, où le nombre des droites est $n - 1$).

Le nombre des parties est minimum, quand il y a un nombre maximum de points de concours de trois droites. Transformons la figure formée du triangle et de ses trois systèmes de droites par une homographie qui fait correspondre le point C à lui-même et les points A, B aux points à l'infini A'_∞, B'_∞ d'un système d'axes rectangulaires CA'_∞, CB'_∞. Les droites issues de A'_∞ sont parallèles et forment un réseau rectangulaire avec les parallèles issues de B'_∞. Il est possible de choisir les droites du réseau de manière que les droites issues de C passent par les sommets du réseau. En effet, soient a_i, b_k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées des sommets et posons $a_i = b_i = \lambda^i a$. La droite $y = \lambda^t x$ resp. $y = \lambda^{-t} x$ passe par les $n - t$ sommets (a_1, b_{t+1}), (a_2, b_{t+2}), $\ldots$, (a_{n-t}, b_n) resp. (a_{t+1}, b_1), (a_{t+2}, b_2), $\ldots$, (a_n, b_{n-t}), où $t = 0, 1, 2, \ldots, n/2$ pour n pair et $t = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ pour n impair. On obtient ainsi $3n^2/4$ resp. $(3n^2 + 1)/4$ points de concours. Pour chaque point de concours le nombre maximum de portions de surface diminue d'une unité. Le nombre minimum des parties est donc

$$3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n^2}{4} = \frac{1}{4}(3n + 2)^2 \qquad \text{pour } n \text{ pair,}$$

$$3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n^2 + 1}{4} = \frac{3}{4}(n + 1)(3n + 1) \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

L. Descloux (Fribourg).

Dieselbe Lösung sandte auch C. Bindschedler (Küsnacht).

Neue Aufgaben

70. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be any n real numbers and let

$$E_n = \frac{\left(\sum_{r=1}^{n} |x_r|\right)^{n(n-1)/2}}{\prod_{r<s} |x_r - x_s|}.$$

Prove that the minimum values of E_n are 4 when $n = 3$, and 256 when $n = 4$.

L. J. Mordell (Cambridge [England]).

71. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est jamais un carré, sauf si $n = 24$. L. Kollros (Zürich).

72. Von einer dreispitzigen Hypozykloide h — bekanntlich eine Kurve dritter Klasse — seien der einbeschriebene Kreis k und eine Tangente t, welche k in A und A' schneidet, gegeben. h berühre t auf der Verlängerung von AA' über A hinaus. Aus einem gegebenen Punkt T von t konstruiere man die beiden andern Tangenten an h.

A. Stoll (Zürich).

73. Man beweise: Bei der dreispitzigen Hypozykloide (H) variiert die Größe der Tangentendreiecke gegebener Form zwischen Null und einem Maximum, bei dem der Umkreis doppelt so groß ist wie der Inkreis von (H), und die Mittelpunkte ihrer Umkreise liegen auf einem mit (H) konzentrischen Kreise. A. Stoll (Zürich).

74. Drei Wallace-Gerade eines Dreiecks bilden ein «Wallace-Dreieck». Man beweise: Damit zwei Dreiecke in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, daß jedes von ihnen ein Wallace-Dreieck des andern ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Umkreise gleich groß sind. A. Stoll (Zürich).