Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1949)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

dern erfordert Hilfsmittel der Analysis (Auswertung unbestimmter Formen, Regel von DE L'HOSPITAL).

Beachtet man den bekannten Zusammenhang, der zwischen dem Arkuskosinus und dem Areacosinushyperbolicus im komplexen Gebiet besteht, so erweisen sich die Formeln (13) und (27) für den elliptisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhuf als völlig gleichwertig. So führt etwa die Formel (13a), wenn man in ihr p durch $-p$ ersetzt, also für p auch negative Werte zuläßt, auf die Formel (27a).

Nach dem bisher Gesagten ist es naheliegend, zu versuchen, etwa nur mit der Formel für den Mantelinhalt des elliptisch begrenzten Drehkegelhufes das Auslangen zu finden. Berechnet man aber den (reellen) Mantelinhalt eines parabolisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhufes etwa mit Hilfe von (13a), so hat man dabei einen nichtelementaren Grenzübergang bzw. Rechnungen mit komplexen Zahlen durchzuführen. Der theoretische Vorteil einer einzigen Formel muß demnach teuer erkauft werden.

Will man aber im Bereiche der natürlichen Anschauung bleiben und für das praktische Rechnen zahlenmäßig unmittelbar auswertbare Formeln bereitstellen, so muß man die im Text durchgeführten Fallunterscheidungen vornehmen.

ARNULF REUSCHEL, Wien.

Kleine Mitteilungen

$c = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ auf dem Rechenschieber

Bisweilen kommt in einer Zahlenrechnung, die mit dem Rechenschieber durchgeführt wird, die Auswertung eines Ausdruckes von der Form $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder auch $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ vor ($|a| > |b|$). Meist werden dazu die beiden Quadrate unter der Wurzel einzeln berechnet, dann addiert bzw. voneinander subtrahiert, und schließlich liefert die Wurzel daraus das gesuchte Ergebnis. — Auf eine andere Weise, die jedoch wenig in Gebrauch

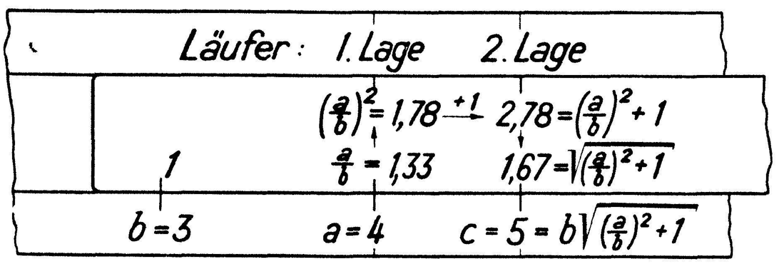

Fig. 1

sein dürfte, läßt sich nun diese Aufgabe viel schneller lösen. Der Rechnungsgang muß nur so vorgenommen werden, wie es die folgende Umformung angibt:

$$c = b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \pm 1}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1.$$

Ein Zahlenbeispiel, das gleichzeitig als Gedächtnisstütze dienen mag, wird am besten dieses Verfahren erläutern. Es sei $a = 4$ und $b = 3$, also $c = 5$, wenn das Pluszeichen gewählt wird. Zunächst wird das Verhältnis a/b so gebildet, daß es auf der unteren Teilung der *Zunge* erscheint, wie es in der Fig. 1 in leicht ersichtlicher Weise dargestellt ist.

Eine passende untere Zungen-1 wird der *kleineren* Kathete $b = 3$ gegenübergestellt und der Läufer über die andere Kathete $a = 4$ geschoben (1. Lage). Auf der oberen Zungenteilung erscheint dann $(a/b)^2 = 1{,}78$, zu welchem Wert jetzt im Kopf 1 addiert wird. Der Läufer wird nunmehr über dieses Zwischenergebnis $(a/b)^2 + 1 = 2{,}78$ geschoben (2. Lage), worauf auf der unteren Stabteilung das Ergebnis

$$b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = c = 5$$

abzulesen ist. Die auf dem Rechenschieber nicht durchführbare Addition zweier beliebiger Zahlen ist ersichtlich in die einfache Addition einer 1 umgeformt worden, die nun leicht in der angegebenen Weise ausgeführt werden kann. – Noch ein Beispiel zum Minuszeichen unter der Wurzel: es sei $\sqrt{17^2 - 8^2}$ $(= 15)$ zu berechnen (Fig. 2).

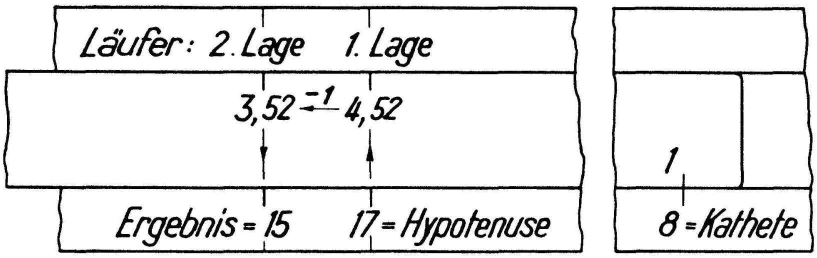

Fig. 2

Das Verfahren dürfte wohl ohne weiteres verständlich sein; das Zwischenergebnis 4,5· braucht dabei nicht einmal zahlenmäßig genau ausgedrückt zu werden, sondern es genügt, sich den letzten Bruchteil nach Augenmaß zu merken, da er ja sogleich auf die Einstellung von 3,5· übertragen wird. Erich Sponder, Paris.

Aufgaben

Aufgabe 49. Wir betrachten drei Vektoren mit demselben Ausgangspunkt O und den Längen a, b und c beziehungsweise. Es sei K das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem die gegebenen Vektoren die Kanten, und H das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem diese Vektoren die Höhen sind. Man beweise, daß das Produkt der Voluminhalte von H und K $(a\,b\,c)^2$ beträgt und verallgemeinere diesen Satz mit Beweis auf n Dimensionen. G. Pólya (Stanford, USA.).

1. Lösung: Der entsprechende Satz für den R_n lautet: Das Parallelepiped H werde durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ aufgespannt, die gleichzeitig die Höhen eines zweiten Parallelepipeds K sind. Das Produkt der Voluminhalte von H und K beträgt $(|\mathfrak{a}_1| \ldots |\mathfrak{a}_n|)^2$. Beweis: K werde durch die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ aufgespannt. Da die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ die Höhen von K sind, gilt für das Skalarprodukt je zweier Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_j$ bei geeigneter Numerierung dieser letztern (die Projektion von $\mathfrak{b}_i$ auf $\mathfrak{a}_i$ ist $\mathfrak{a}_i$!):

$$\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ |\mathfrak{a}_i|^2 & \text{für } i = j. \end{cases} \qquad (*)$$

Das Volumen von H läßt sich darstellen durch die Determinante A, deren Zeilen die (skalaren) Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ sind, das Volumen von K durch die Determinante B^*, deren Spalten die Komponenten der $\mathfrak{b}_j$ sind. Das Produkt der beiden Determinanten $P = AB^*$ ist die Determinante mit dem allgemeinen Glied $p_{ij} = \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_j$. Sie hat nach (*) den Wert

$$P = |\mathfrak{a}_1|^2 \ldots |\mathfrak{a}_n|^2 = (|\mathfrak{a}_1| \ldots |\mathfrak{a}_n|)^2, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

W. Gysin (Zug).