

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 6  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

dern erfordert Hilfsmittel der Analysis (Auswertung unbestimmter Formen, Regel von DE L'HOSPITAL).

Beachtet man den bekannten Zusammenhang, der zwischen dem Arkuskosinus und dem Areacosinushyperbolicus im komplexen Gebiet besteht, so erweisen sich die Formeln (13) und (27) für den elliptisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhuf als völlig gleichwertig. So führt etwa die Formel (13a), wenn man in ihr  $\rho$  durch  $-\rho$  ersetzt, also für  $\rho$  auch negative Werte zuläßt, auf die Formel (27a).

Nach dem bisher Gesagten ist es naheliegend, zu versuchen, etwa nur mit der Formel für den Mantelinhalt des elliptisch begrenzten Drehkegelhufes das Auslangen zu finden. Berechnet man aber den (reellen) Mantelinhalt eines parabolisch bzw. hyperbolisch begrenzten Drehkegelhufes etwa mit Hilfe von (13a), so hat man dabei einen nichtelementaren Grenzübergang bzw. Rechnungen mit komplexen Zahlen durchzuführen. Der theoretische Vorteil einer einzigen Formel muß demnach teuer erkauft werden.

Will man aber im Bereiche der natürlichen Anschauung bleiben und für das praktische Rechnen zahlenmäßig unmittelbar auswertbare Formeln bereitstellen, so muß man die im Text durchgeführten Fallunterscheidungen vornehmen.

ARNULF REUSCHEL, Wien.

## Kleine Mitteilungen

$$c = \sqrt{a^2 \pm b^2} \text{ auf dem Rechenschieber}$$

Bisweilen kommt in einer Zahlenrechnung, die mit dem Rechenschieber durchgeführt wird, die Auswertung eines Ausdrückes von der Form  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  oder auch  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  vor ( $|a| > |b|$ ). Meist werden dazu die beiden Quadrate unter der Wurzel einzeln berechnet, dann addiert bzw. voneinander subtrahiert, und schließlich liefert die Wurzel daraus das gesuchte Ergebnis. — Auf eine andere Weise, die jedoch wenig in Gebrauch

Läufer: 1. Lage    2. Lage	
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1,78$	$2,78 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1$
$\frac{a}{b} = 1,33$	$1,67 = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}$
$b = 3$	$c = 5 = b\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}$

Fig. 1

sein dürfte, läßt sich nun diese Aufgabe viel schneller lösen. Der Rechnungsgang muß nur so vorgenommen werden, wie es die folgende Umformung angibt:

$$c = b \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \pm 1}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1.$$

Ein Zahlenbeispiel, das gleichzeitig als Gedächtnisstütze dienen mag, wird am besten dieses Verfahren erläutern. Es sei  $a = 4$  und  $b = 3$ , also  $c = 5$ , wenn das Pluszeichen gewählt wird. Zunächst wird das Verhältnis  $a/b$  so gebildet, daß es auf der unteren Teilung der Zunge erscheint, wie es in der Fig. 1 in leicht ersichtlicher Weise dargestellt ist.

Eine passende untere Zungen-1 wird der *kleineren* Kathete  $b = 3$  gegenübergestellt und der Läufer über die andere Kathete  $a = 4$  geschoben (1. Lage). Auf der oberen Zungenteilung erscheint dann  $(a/b)^2 = 1,78$ , zu welchem Wert jetzt im Kopf 1 addiert wird. Der Läufer wird nunmehr über dieses Zwischenergebnis  $(a/b)^2 + 1 = 2,78$  geschoben (2. Lage), worauf auf der unteren Stabteilung das Ergebnis

$$b \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = c = 5$$

abzulesen ist. Die auf dem Rechenschieber nicht durchführbare Addition zweier beliebiger Zahlen ist ersichtlich in die einfache Addition einer 1 umgeformt worden, die nun leicht in der angegebenen Weise ausgeführt werden kann. — Noch ein Beispiel zum Minuszeichen unter der Wurzel: es sei  $\sqrt{17^2 - 8^2}$  ( $= 15$ ) zu berechnen (Fig. 2).

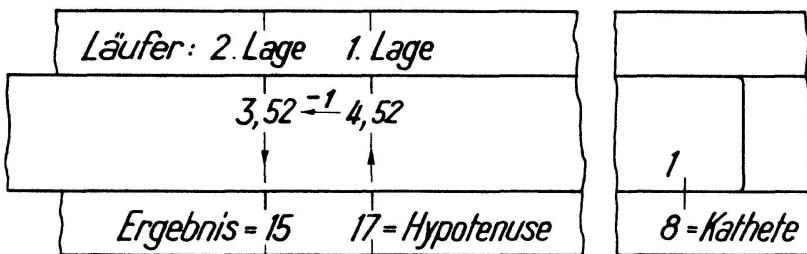


Fig. 2

Das Verfahren dürfte wohl ohne weiteres verständlich sein; das Zwischenergebnis  $4,5\cdot$  braucht dabei nicht einmal zahlenmäßig genau ausgedrückt zu werden, sondern es genügt, sich den letzten Bruchteil nach Augenmaß zu merken, da er ja sogleich auf die Einstellung von  $3,5\cdot$  übertragen wird.

ERICH SPONDER, Paris.

## Aufgaben

**Aufgabe 49.** Wir betrachten drei Vektoren mit demselben Ausgangspunkt  $O$  und den Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$  beziehungsweise. Es sei  $K$  das Parallelepiped mit Eckpunkt  $O$ , von dem die gegebenen Vektoren die Kanten, und  $H$  das Parallelepiped mit Eckpunkt  $O$ , von dem diese Vektoren die Höhen sind. Man beweise, daß das Produkt der Volumeninhalte von  $H$  und  $K$   $(a b c)^2$  beträgt und verallgemeinere diesen Satz mit Beweis auf  $n$  Dimensionen.

G. PÓLYA (Stanford, USA.).

1. *Lösung:* Der entsprechende Satz für den  $R_n$  lautet: Das Parallelepiped  $H$  werde durch die Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aufgespannt, die gleichzeitig die Höhen eines zweiten Parallelepipeds  $K$  sind. Das Produkt der Volumeninhalte von  $H$  und  $K$  beträgt  $(|a_1| \dots |a_n|)^2$ . Beweis:  $K$  werde durch die Vektoren  $b_1, b_2, \dots, b_n$  aufgespannt. Da die Vektoren  $a_i$  die Höhen von  $K$  sind, gilt für das Skalarprodukt je zweier Vektoren  $a_i$  und  $b_j$  bei geeigneter Numerierung dieser letztern (die Projektion von  $b_i$  auf  $a_i$  ist  $a_i$ !):

$$a_i \cdot b_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ |a_i|^2 & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (*)$$

Das Volumen von  $H$  läßt sich darstellen durch die Determinante  $A$ , deren Zeilen die (skalaren) Komponenten der Vektoren  $a_i$  sind, das Volumen von  $K$  durch die Determinante  $B^*$ , deren Spalten die Komponenten der  $b_j$  sind. Das Produkt der beiden Determinanten  $P = A B^*$  ist die Determinante mit dem allgemeinen Glied  $p_{ij} = a_i b_j$ . Sie hat nach (\*) den Wert

$$P = |a_1|^2 \dots |a_n|^2 = (|a_1| \dots |a_n|)^2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

W. GYSIN (Zug).