Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 6

Artikel: Quasiarithmetische Mittelwerte
Autor: Jecklin, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14329

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Punkt, Gerade, Ebene allgemein gültig sind: Eine Ebene und eine ihr nicht angehörende Gerade haben genau einen gemeinsamen Punkt. Drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte bestimmen genau eine sie enthaltende Ebene, usw.

Ferner lassen sich nun die imaginären Elemente, die z. B. in einer Fläche zweiten Grades enthalten sind, anschaulich darstellen. Auf den ovalen Flächen zweiten Grades liegen zwei Scharen von speziellen imaginären Geraden, hingegen keine reelle und keine allgemeine imaginäre Geraden. Das einschalige Hyperboloid trägt außer zwei Scharen von reellen Geraden auch allgemeine imaginäre Geraden. Fig. 13 zeigt die Verhältnisse bei der Kugel, deren sämtliche Punkte wir überschauen wollen. Eine Ebene α_1 durch den Mittelpunkt schneidet in einem Großkreis, dessen Pfeilfeld (vgl. hierzu S. 104) in der Figur angedeutet ist. Verschieben wir die Schnittebene in die Tangentialebene α_3, so ergibt sich als Schnitt das Pfeilfeld von zwei konjugierten isotropen Geraden. In der Lage α_4 hat die Ebene nur noch die imaginären Punkte eines imaginären Kreises mit der Kugel gemeinsam. (Um die sämtlichen Punkte des jeweiligen Schnittgebildes zu erhalten, hat man Fig. 13 natürlich um die Achse a zu drehen.)

Es sei auch noch die Frage beantwortet, wie sich die übliche Darstellung der komplexen Zahlen in einem rechtwinkligen (x, y)-System in die allgemeine geometrische Imaginärtheorie einordnet. Es sei I derjenige imaginäre Punkt der unendlichfernen Geraden, der aus dieser von jeder im positiven Drehsinn gerichteten Rechtwinkel-Strahleninvolution der (x, y)-Ebene ausgeschnitten wird. Verbindet man I mit allen Punkten der x-Achse, so hat der reelle Punkt der Geraden, die I mit dem Punkte $x = a + ia'$ der x-Achse verbindet, offenbar die Koordinaten $x = a$, $y = a'$.

Durch unsere Ausführungen hoffen wir gezeigt zu haben, daß die hier verwendete Pfeil-Darstellung mindestens im linearen und quadratischen Gebiet einige Vorteile bietet.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Quasiarithmetische Mittelwerte[1])

IV. Die Jensensche Ungleichung erlaubt – wie gesagt –, eine quasiarithmetische Mittelbildung nach konvexer (oder konkaver) Funktion mit dem entsprechenden arithmetischen Mittel zu vergleichen.

Setzen wir z. B. $f(x) = x^p$, so führt uns dies zum Potenzmittel

$$m = \left(\frac{\sum k_i x_i^p}{\sum k_i}\right)^{1/p}.$$

Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden bezüglich p, welches $\neq 0$ und ganz vorausgesetzt sei (was nicht notwendig wäre). Man kann zeigen, daß der Fall $p = 0$ mit dem geometrischen Mittel identisch ist[2]); $p = 1$ ergibt das arithmetische Mittel. – Betrachten wir vorerst das Intervall $-\infty < x < +\infty$, so ist x^p für gerades, positives oder negatives p eine konvexe oder konkave, aber nicht monotone Funktion; ist

[1]) Erster Teil in Heft 5 (1949) dieser Zeitschrift.

[2]) H. JECKLIN und M. EISENRING, *Die elementaren Mittelwerte*, Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. *47*, 1 (1947).

aber p ungerade, so haben wir eine monotone, aber nicht im ganzen Intervall konvexe (oder konkave) Funktion. Nur im zweiten Falle, d. h. nur für ungerades p, ist also die Bildung von Potenzmitteln für beliebige endliche positive oder negative Größen zulässig, wobei eine Aussage über das Größenverhältnis zum arithmetischen Mittel nicht gemacht werden kann. Beschränken wir uns dagegen auf das Intervall $0 \leqq x < \infty$, wobei weiterhin $p \neq 0$ und ganz vorausgesetzt sei, so ist x für positives p konvex steigend, für negatives p dagegen konvex fallend. Im ersten Falle ist demnach das Potenzmittel größer als das arithmetische Mittel, im zweiten Falle aber kleiner. So ist bekanntlich das quadratische Mittel ($p = 2$) größer, das harmonische Mittel ($p = -1$) kleiner als das arithmetische Mittel.

Oder setzen wir $f(x) = c^x$, c eine positive Konstante $\neq 1$, so erhalten wir das exponentielle Mittel

$$m = \frac{\log(\Sigma k_i c^{x_i} / \Sigma k_i)}{\log c} = \frac{\log \Sigma k_i c^{x_i} - \log \Sigma k_i}{\log c}.$$

Je nachdem c größer oder kleiner als 1, ist c^x konvex steigend oder konvex fallend, und zwar für das Intervall $-\infty < x < +\infty$. Das exponentielle Mittel ist daher im ersten Falle größer, im zweiten Falle kleiner als das arithmetische Mittel.

Oder sei $f(x) = \log x$. Dann haben wir das logarithmisch-arithmetische bzw. geometrische Mittel

$$\log m = \frac{\Sigma k_i \log x_i}{\Sigma k_i} \quad \text{bzw.} \quad m = (\Pi x_i^{k_i})^{1/\Sigma k_i}.$$

Der Logarithmus ist nur für positive x erklärt und im Intervall $0 < x < \infty$ eine endliche, konkav steigende Funktion. Das geometrische Mittel ist daher kleiner als das arithmetische Mittel.

Schließlich seien noch die trigonometrischen Mittelwerte erwähnt[1]), wobei wir als Beispiel lediglich das Sinusmittel nennen. Ist $f(x) = \sin x$, so ergibt sich aus der Gleichsetzung

$$(\Sigma k_i) \sin m = \Sigma k_i \sin x_i,$$

$$m = \arc\sin \frac{\Sigma k_i \sin x_i}{\Sigma k_i}.$$

Nachdem $\sin x$ eine periodische Funktion ist, erhellt von vornherein, daß die Mittelbildung auf gewisse Intervalle beschränkt sein muß.

Wir betrachten daher Teilintervalle des Intervalls $(-\pi, +\pi)$, das als Ganzes zur Mittelbildung offensichtlich nicht zulässig ist:

Intervall $(-\pi, 0)$: $\sin x$ ist konvex, aber nicht monoton, also Mittelbildung nicht möglich,

Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x$ ist monoton steigend, aber nicht durchwegs konvex oder konkav; Mittelbildung möglich, aber ohne Vergleichsmöglichkeit mit arithmetischem Mittel,

Intervall $(0, +\pi)$: $\sin x$ ist konkav, aber nicht monoton, also Mittelbildung nicht möglich,

[1]) A. PRATELLI, *Sulle medie trigonometriche*, Atti I.a riunione sci. Soc. ital. statistica (Pisa 9. 10. 1939).

Intervall $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x$ monoton fallend konvex, also Sinusmittel $<$ arithmetisches Mittel,

Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $\sin x$ monoton steigend konvex, also Sinusmittel $>$ arithmetisches Mittel,

Intervall $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x$ monoton steigend konkav, also Sinusmittel $<$ arithmetisches Mittel,

Intervall $\left(+\frac{\pi}{2}, +\pi\right)$: $\sin x$ monoton fallend konkav, also Sinusmittel $>$ arithmetisches Mittel.

V. Die von uns zur Herleitung des Satzes von JENSEN benutzte geometrische Methode gibt auch die Möglichkeit, das quasiarithmetische Mittel von n Werten x_i

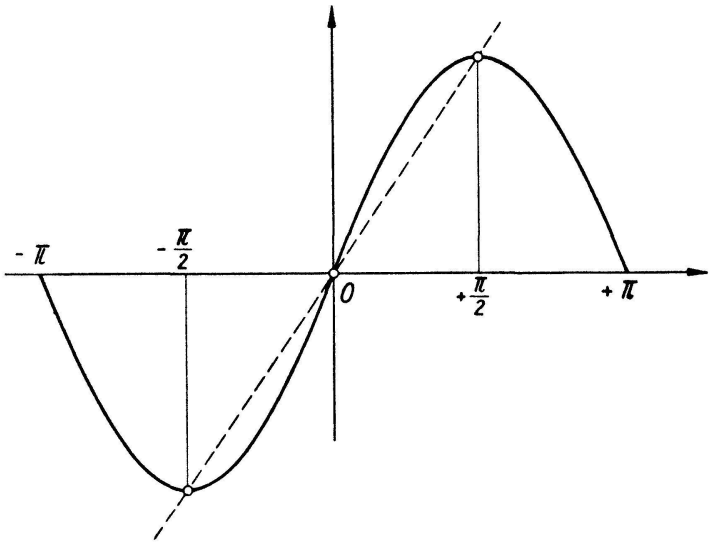

Fig. 4

nach einer gezeichnet vorliegenden Kurve, die nicht eine analytische Funktion zu sein braucht, graphisch zu bestimmen. Bezeichnen wir den dem Abszissenwert x_i entsprechenden Kurvenpunkt mit P_i. Dann geht man zur Bestimmung des ungewogenen quasiarithmetischen Mittels in folgender, ohne weiteres evidenter Weise vor: die Halbierung der Verbindungsstrecke P_1P_2 ergibt den Punkt $\overline{P}_1$ (siehe Fig. 5); die Teilung der Strecke $\overline{P}_1P_3$ im Verhältnis 1:2 ergibt $\overline{P}_2$; die Teilung der Strecke $\overline{P}_2P_4$ im Verhältnis 1:3 ergibt $\overline{P}_3$; usw. Schließlich erhält man durch Teilung der Strecke $\overline{P}_{n-2}\,P_n$ im Verhältnis $1:(n-1)$ den Punkt $\overline{P}_{n-1}$. Die Waagrechte durch letzteren bestimmt auf der Kurve einen Punkt P_m, dessen Abszisse m der gesuchte Mittelwert ist. Bei der Verdeutlichung in Fig. 5 wurde als einfaches Beispiel $f(x) = 2^x$ und $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3{,}5$, $x_4 = 4$ gewählt. Rechnungsmäßig ergibt sich

$$m = \frac{\log \sum 2^x - \log n}{\log c} = \frac{\log 33{,}31 - \log 4}{\log 2} = 3{,}06.$$

Das Verfahren ist natürlich, in sinngemäßer Anpassung der Streckenteilung, auch zur graphischen Bestimmung gewogener Mittel anwendbar.

VI. Eine Verallgemeinerung des Satzes von JENSEN zwecks Vergleich von quasiarithmetischen Mitteln miteinander ist sehr wohl denkbar und sei kurz skizziert: Die quasiarithmetische Mittelbildung gemäß (2)

$$n\, f(m) = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, f(x_i)$$

ist das diskrete Analogon zum Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$(a - b)\, f(m) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Seien nun $f(x)$ und $h(x)$ zwei verschiedene, im Intervall (x_1, x_2) reelle, stetige, endliche, monotone Funktionen und zudem konvex oder konkav. Dann können wir

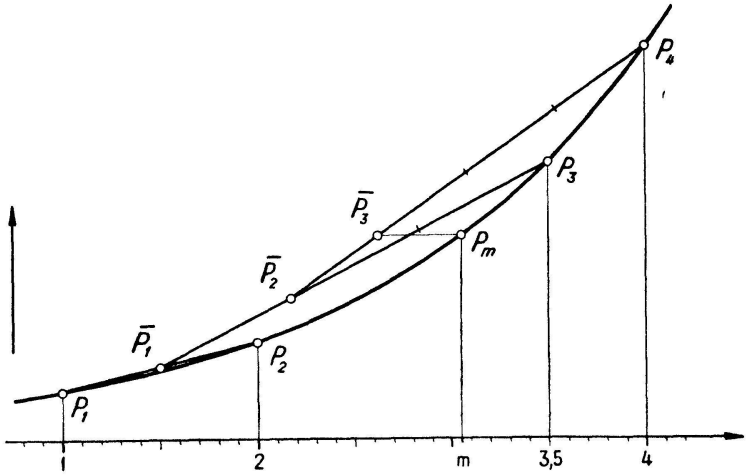

Fig. 5

durch lineare Transformation von $h(x)$ in $\bar{h}(x) = h(x)\, a + b$ stets erreichen, daß die transformierte Funktion für x_1 den Wert $f(x_1)$ und für x_2 den Wert $f(x_2)$ annimmt.

Zu diesem Zwecke ist lediglich zu setzen:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{h(x_1) - h(x_2)}, \qquad b = \frac{f(x_1)\, h(x_2) - f(x_2)\, h(x_1)}{h(x_1) - h(x_2)}.$$

Sind nun z. B. $h(x)$ und $f(x)$ beide konvex steigend und ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \bar{h}(x)\, dx < \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx,$$

so ist das quasiarithmetische Mittel nach $h(x)$ größer als jenes nach $f(x)$, und umgekehrt. Wir möchten jedoch im Rahmen dieser Arbeit auf Details dieses theoretisch interessanten Problems nicht näher eintreten.

VII. Für die Praxis kommen im allgemeinen außer dem arithmetischen Mittel selbst und dem exponentiellen Mittel, das in Finanz- und Versicherungsmathematik eine

große Rolle spielt, von den quasiarithmetischen Mitteln nur die sog. klassischen Mittelwerte in Frage. Wenn wir unter letzteren üblicherweise das kontraharmonische Mittel (K), das quadratische Mittel (Q), das arithmetische Mittel (M), das geometrische Mittel (G) und das harmonische Mittel (H) verstehen, so gilt bekanntlich

$$K \geqq Q \geqq M \geqq G \geqq H$$

oder formelmäßig für ungewogene Mittel,

$$\frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma x} \geqq \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}} \geqq \frac{\Sigma x_i}{n} \geqq \sqrt[n]{\Pi x_i} \geqq \frac{n}{\Sigma x_i^{-1}}.$$

Wir geben im folgenden einen sehr einfachen Beweis für die Gültigkeit dieser Größenordnung, der das Ergebnis eines brieflichen Gedankenaustausches mit Herrn BENGT ÅCKERBERG, Stockholm, ist.

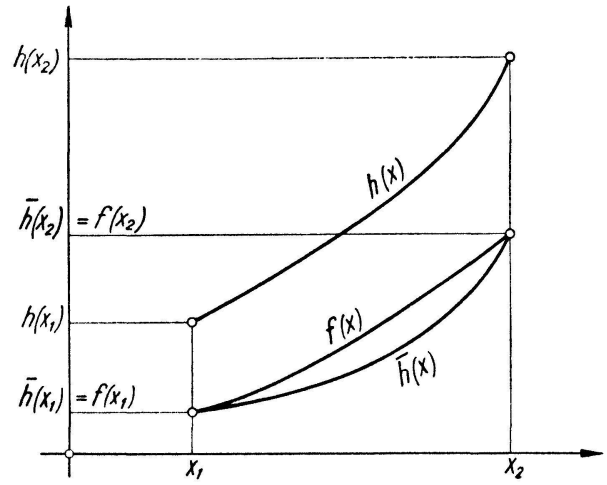

Fig. 6

Vorerst aber noch eine Bemerkung: Das kontraharmonische Mittel ist, als solches betrachtet, kein quasiarithmetisches Mittel. Es ist nicht von der Gestalt (2) und besitzt insbesondere auch Eigenschaft Ic nicht. Es ist auch im allgemeinen keine in bezug auf das einzelne x_i monotone Funktion, welche Eigenschaft für formelmäßige Mittelwerte zumeist vorausgesetzt wird[1]). Das Dilemma verschwindet jedoch, wenn wir das kontraharmonische Mittel lediglich als spezielle Position des gewogenen arithmetischen Mittels $m = \Sigma k_i x_i / \Sigma k_i$ auffassen, wobei $k_i = x_i$, was im Intervall $0 \leqq x < \infty$ ohne weiteres zulässig ist. Ähnliche Vorbehalte und Überlegungen gelten bezüglich der verallgemeinerten Potenzmittel[2]) überhaupt, worauf wir in anderem Zusammenhange zurückzukommen uns vorbehalten.

Setzen wir nun $x_i = M + \delta_i$. Es folgt dann bekanntermaßen aus der Definition des arithmetischen Mittels wegen $\Sigma x_i = n M$, daß $\Sigma \delta_i = 0$. Außerdem ist $\Sigma \delta_i^2 \geqq 0$, und der Ausdruck $\sigma^2 = \Sigma \delta_i^2 / n$ ist das auf M bezogene Streuungsquadrat der x_i.

[1]) A. KOLMOGOROFF, *Sur la notion de la moyenne*, Atti Reale Acad. naz. Lincei, 6. Ser., *12* (1930). – M. NAGUMO, *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Jap. J. Math. *7* (1930).

[2]) C. GINI, *Di una formola comprensive delle medie*, Metron, Rev. int. Statistica *13*, 2 (1938).

Nunmehr haben wir (wenn einfachheitshalber der Index i weggelassen wird):

$$K = \frac{\Sigma x^2}{\Sigma x} = \frac{\Sigma (M+\delta)^2}{\Sigma (M+\delta)} = \frac{n M^2 + 2 M \Sigma \delta + \Sigma \delta^2}{n M + \Sigma \delta}$$

$$= \frac{n M^2 + \Sigma \delta^2}{n M} = M + \frac{\sigma^2}{M} \geqq M.$$

Weiter ist
$$K^2 = \left(M + \frac{\sigma^2}{M}\right)^2 = M^2 + 2\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{M^2}$$

und
$$Q^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{\Sigma (M+\delta)^2}{n} = \frac{n M^2 + \Sigma \delta^2}{n} = M^2 + \sigma^2.$$

Nun ist aber sicher
$$M^2 + 2\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{M^2} \geqq M^2 + \sigma^2 \geqq M^2,$$

also $K^2 \geqq Q^2 \geqq M^2$, d. h. $K \geqq Q \geqq M$.

Dabei haben sich als Nebenprodukt die einfachen Beziehungen zwischen K, Q und M ergeben:

$$Q^2 = M^2 + \sigma^2, \quad K = M + \frac{\sigma^2}{M}, \quad \frac{Q^2}{M} = K, \quad \text{also} \quad Q^2 = MK.$$

Nunmehr setzen wir $x_i = G e^{\alpha_i}$. Es folgt dann aus der Definition des geometrischen Mittels wegen $\Pi x_i = G^n$, daß $\Sigma \alpha_i = 0$ sein muß. Weiter ist stets $e^x \geqq 1 + x$, ungeachtet des Vorzeichens von x. Für positive x folgt die Ungleichung sofort aus der bekannten Reihendarstellung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

für negative x z. B. aus der Überlegung, daß $y = 1 + x$ die Tangente an e^x im Punkte (0, 1) ist. Also gilt:

$$M = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{G \Sigma e^{\alpha_i}}{n} \geqq \frac{G \Sigma (1 + \alpha_i)}{n} = G + \frac{G \Sigma \alpha_i}{n} = G,$$

und
$$\frac{1}{H} = \frac{\Sigma x_i^{-1}}{n} = \frac{\Sigma e^{-\alpha_i}}{G n} \geqq \frac{\Sigma (1 - \alpha_i)}{G n} = \frac{1}{G} - \frac{\Sigma \alpha_i}{G n} = \frac{1}{G},$$

d. h.
$$M \geqq G \geqq H.$$

H. JECKLIN, Zürich.

Eine einfache Berechnung der Mantelfläche eines Drehkegelhufes[1])

c) Es soll nun der Mantelinhalt eines Drehkegelhufes berechnet werden, der zwischen einem *Hyperbelbogen* und dem ihm in der Zentralprojektion aus S entsprechenden Bogen des Grundkreises gelegen ist. (Abb. 3 wurde für die Annahme $q < p$ entworfen.)

[1]) Erster Teil in Heft 4 (1949) dieser Zeitschrift.