Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 5

Artikel: Quasiarithmetische Mittelwerte
Autor: Jecklin, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14327

Quasiarithmetische Mittelwerte

I. Sind $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ reelle Größen, so ist bekanntlich ihr arithmetisches Mittel definiert als

$$m = \sum_1^n \frac{x_i}{n}. \tag{1}$$

Unter einem einfachen quasiarithmetischen Mittel versteht man sodann eine Mittelbildung, welche sich aus der Gleichsetzung

$$n\, f(m) = \sum_1^n f(x_i) \tag{2}$$

ergibt, also von der Gestalt ist

$$m = \varphi\left(\sum_1^n \frac{f(x_i)}{n}\right),$$

worin φ die Umkehrfunktion von $f(x)$ bedeutet, d. h. $\varphi\,[f(x)] = x$. Damit die Mittelbildung eindeutig durchführbar ist, muß $f(x)$ in dem zu mittelnden Intervall notwendigerweise reell, eindeutig, stetig, endlich und streng monoton sein[1]. Die einfachen quasiarithmetischen Mittel sind symmetrische Funktionen der x_i.

Wir nennen vorerst drei Eigenschaften der quasiarithmetischen Mittel, die wir im folgenden benötigen:

a) Haben wir einen Mittelwert gemäß (2) und sind k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ positive Konstanten, so ist auch

$$m = \varphi\left(\frac{\Sigma\, k_i f(x_i)}{\Sigma\, k_i}\right) \tag{3}$$

ein Mittelwert, und zwar ein gewogenes quasiarithmetisches Mittel. Denn ist $f(x)$ monoton steigend, so ist

$$f(x_1)\, \Sigma\, k_i \leqq \Sigma\, k_i\, f(x_i) \leqq f(x_n)\, \Sigma\, k_i.$$

Aber ist $f(x)$ monoton fallend, so ist

$$f(x_1)\, \Sigma\, k_i \geqq \Sigma\, k_i\, f(x_i) \geqq f(x_n)\, \Sigma\, k_i.$$

In beiden Fällen aber ist [2]

$$x_1 \leqq \varphi\left(\frac{\Sigma\, k_i f(x_i)}{\Sigma\, k_i}\right) \leqq x_n.$$

Die gewogenen Mittel sind nicht mehr symmetrische Funktionen der x_i.

b) Die quasiarithmetische Mittelbildung ist gegenüber linearer Transformation von $f(x)$ invariant, d. h. wenn in (3) die Funktion $f(x)$ durch $a\, f(x) + b$, wobei a und b konstant, ersetzt wird, so ändert sich der Wert des Mittels nicht. Denn aus

$$[f(m)\, a + b]\, \Sigma\, k_i = \Sigma \{k_i\, [f(x_i)\, a + b]\}$$

---

[1] G. AUMANN, *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente*, Math. Ann. *109* (1933).

[2] H. JECKLIN, *Der Begriff des mathematischen Mittelwertes und die Mittelwertformeln*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *93*, 1 (1948).

folgt unmittelbar
$$m = \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right).$$

c) Bei der Bildung quasiarithmetischer Mittel darf eine Anzahl der zu mittelnden Größen x_i durch ihren Teilmittelwert ersetzt werden, d. h. es ist

$$m = \varphi\left(\frac{\sum\limits_1^n k_i f(x_i)}{\sum\limits_1^n k_i}\right) = \varphi\left(\frac{f(\bar{x})\sum\limits_1^h k_i + \sum\limits_{h+1}^n k_i f(x_i)}{\sum\limits_1^n k_i}\right), \tag{4}$$

wobei
$$\bar{x} = \varphi\left(\frac{\sum\limits_1^h k_i f(x_i)}{\sum\limits_1^h k_i}\right), \quad h < n,$$

was sofort evident ist.

II. Nach der von JENSEN[1]) gegebenen Definition nennt man eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall konvex, wenn im ganzen Intervall für $x_i \neq x_k$ die Ungleichung

$$\frac{f(x_i) + f(x_k)}{2} \geqq f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right)$$

erfüllt ist. Gilt die Ungleichung in umgekehrtem Sinne, so ist $f(x)$ konkav. Kommt das Gleichheitszeichen nicht in Frage, so ist die Funktion streng konvex bzw. streng konkav.

Hat eine Funktion $f(x)$ außer den eingangs für die Mittelbildung geforderten Eigenschaften noch die Besonderheit, konvex oder konkav zu sein, so können wir vier Fälle unterscheiden:

konvex steigend, konvex fallend, konkav steigend, konkav fallend.

JENSEN hat folgende Ungleichung bewiesen: Sind x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) reelle Größen, k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) beliebige positive Konstanten, $f(x)$ eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften, φ deren Umkehrfunktion, dann ist

$$f\left(\frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}\right) \leqq \frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i},$$

wenn $f(x)$ konvex, bzw.
$$f\left(\frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}\right) \geqq \frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i},$$

wenn $f(x)$ konkav, woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} &\leqq \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right), && \text{wenn } f(x) \text{ konvex steigend oder konkav fallend} \\ \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} &\geqq \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right), && \text{wenn } f(x) \text{ konkav steigend oder konvex fallend} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Diese Jensensche Ungleichung gibt die Möglichkeit, zu entscheiden, ob die quasiarithmetische Mittelbildung nach einer konvexen oder konkaven Funktion größere

[1]) V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta mathematica *30* (1905).

oder kleinere Werte als das arithmetische Mittel liefert, wofür wir im folgenden einige Beispiele anführen werden.

III. Vorerst geben wir eine einfache und anschauliche Herleitung des Satzes von JENSEN (5), wobei wir uns auf den Fall steigender Konvexität beschränken; die übrigen drei Fälle lassen sich einfach in sinngemäßer Abwandlung erledigen. Der Beweisgang stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

Ist $f(x)$ eine steigende konvexe Funktion, $g(\xi) = a\,\xi + b$ eine Gerade, und ist weiter für $\xi_1 \leqq x_1$ und $\xi_2 \leqq x_2$

$$g(\xi_1) = f(x_1) \quad \text{und} \quad g(\xi_2) = f(x_2),$$

so ist für
$$g(\mu) = \frac{k_1 g(\xi_1) + k_2 g(\xi_2)}{k_1 + k_2} = f(m) = \frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)}{k_1 + k_2},$$

$$\mu = \gamma[g(\mu)] \leqq m = \varphi[f(m)], \tag{6}$$

wobei γ die Umkehrfunktion von $g(\xi)$, φ jene von $f(x)$ bedeutet (Fig. 1).

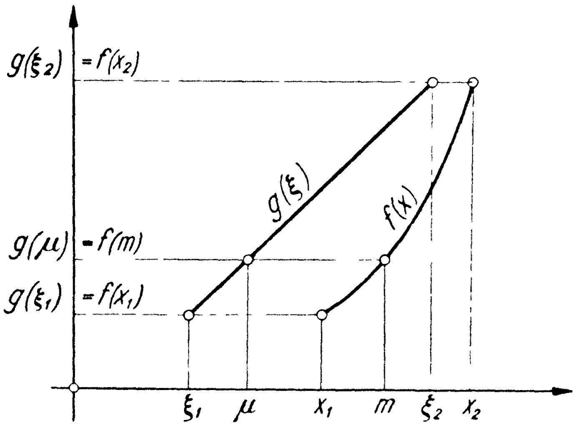

Fig. 1

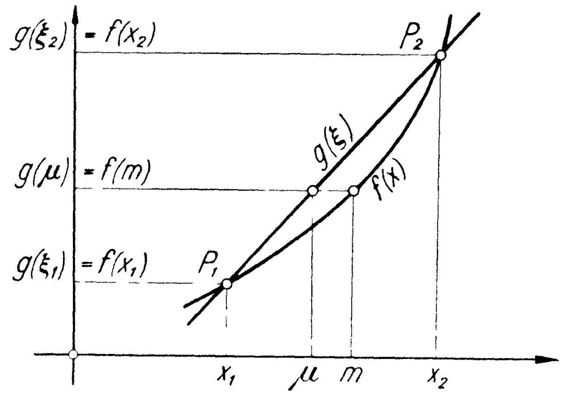

Fig. 2

Seien nun zwei reelle Größen $x_1 < x_2$ gegeben und eine steigende konvexe Funktion $f(x)$ sowie deren Umkehrfunktion φ. Weiter sei $g(\xi) = a\,\xi + b$ die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $[x_1, f(x_1)]$ und $[x_2, f(x_2)]$, und γ sei die Umkehrfunktion von $\gamma(\xi)$ (Fig. 2).

Es ist also $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$ und $g(\xi_1) = f(x_1)$, $g(\xi_2) = f(x_2)$. Bezeichnen wir mit k_1, k_2 zwei positive Konstanten, so ist gemäß (6)

$$g(\mu) = \frac{k_1 g(\xi_1) + k_2 g(\xi_2)}{k_1 + k_2} = f(m) = \frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)}{k_1 + k_2},$$

also
$$\mu = \gamma[g(\mu)] \leqq m = \varphi[f(m)].$$

Nachdem aber $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ist offenbar, in Anwendung von Ib,

$$\mu = \gamma[g(\mu)] = \frac{k_1(a\,x_1 + b) + k_2(a\,x_2 + b) - (k_1 + k_2)\,b}{(k_1 + k_2)\,a} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}.$$

Das heißt es ist μ das mit den gleichen Gewichten wie das quasiarithmetische Mittel m gebildete arithmetische Mittel, womit (5) für $n = 2$ bewiesen ist.

Seien nun drei reelle Größen $x_1 < x_2 < x_3$ gegeben und eine steigende konvexe Funktion $f(x)$ mit der Umkehrfunktion φ; k_i seien die zu x_i gehörigen positiven Gewichte ($i = 1, 2, 3$).

Nun bilden wir vorerst für x_1 und x_2 die beiden Teilmittelwerte μ und m in der soeben beschriebenen Weise. Es ist also $\mu \leqq m$, und $g(\mu) = f(m)$. – Wir bezeichnen sodann die Gerade durch die Punkte P' und P_3 mit den Koordinaten $[\mu, f(m)]$ und $[x_3, f(x_3)]$ mit $\bar{g}(\xi) = \bar{a}\,\xi + \bar{b}$. Wenden wir nun Hilfssatz (6) in bezug auf die Abszissen $\mu \leqq m$, $\xi_3 = x_3$ und die zugehörigen Funktionswerte $\bar{g}(\mu) = f(m)$ und $\bar{g}(\xi_3) = f(x_3)$ an, so folgt:

$$\bar{g}(\bar{\mu}) = \frac{(k_1 + k_2)\,\bar{g}(\mu) + k_3\,\bar{g}(\xi_3)}{k_1 + k_2 + k_3} = f(\bar{m}) = \frac{(k_1 + k_2)\,f(m) + k_3\,f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3},$$

also

$$\bar{\mu} = \bar{\gamma}\,[\bar{g}(\bar{\mu})] \leqq m = \varphi[f(\bar{m})].$$

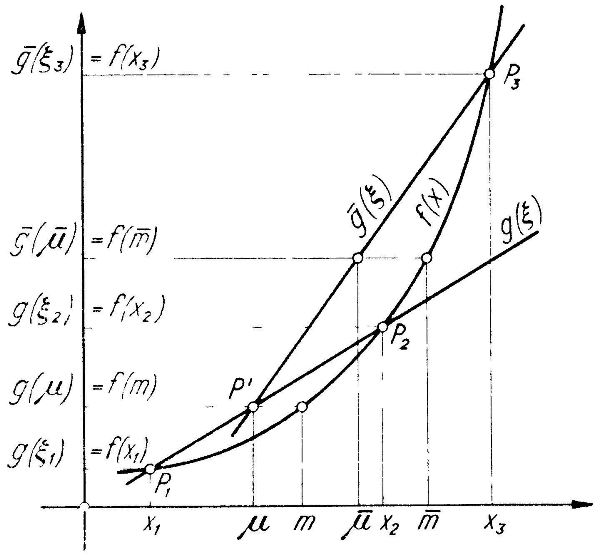

Fig. 3

Nun ist einerseits nach Ib:

$$\mu = \frac{k_1\,x_1 + k_2\,x_2}{k_1 + k_2} = \gamma\left(\frac{k_1\,g(x_1) + k_2\,g(x_2)}{k_1 + k_2}\right) = \bar{\gamma}\left(\frac{k_1\,\bar{g}(x_1) + k_2\,\bar{g}(x_2)}{k_1 + k_2}\right)$$

und anderseits nach Ic:

$$\bar{\mu} = \bar{\gamma}\left(\frac{(k_1 + k_2)\,\bar{g}(\mu) + k_3\,\bar{g}(\xi_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right) = \bar{\gamma}\left(\frac{k_1\,\bar{g}(x_1) + k_2\,\bar{g}(x_2) + k_3\,\bar{g}(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right),$$

$$\bar{m} = \varphi\left(\frac{(k_1 + k_2)\,f(m) + k_3\,f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right) = \varphi\left(\frac{k_1\,f(x_1) + k_2\,f(x_2) + k_3\,f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right).$$

Sodann gilt, wiederum nach Ib:

$$\bar{\mu} = \gamma\left(\frac{k_1\,\bar{g}(x_1) + k_2\,\bar{g}(x_2) + k_3\,\bar{g}(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right) = \frac{k_1\,x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3}{k_1 + k_2 + k_3},$$

so daß wir haben:

$$\bar{\mu} = \frac{k_1\,x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3}{k_1 + k_2 + k_3} \leqq \bar{m} = \varphi\left(\frac{k_1\,f(x_1) + k_2\,f(x_2) + k_3\,f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3}\right).$$

Damit ist (5) für $n = 3$ bewiesen. Der Beweisgang ist evidenterweise, immer unter Verwendung der gleichen Hilfssätze, fortsetzbar, so daß (5) bei den gemachten Voraussetzungen über $f(x)$ für beliebiges n gilt. (Schluß folgt.) H. JECKLIN, Zürich.