Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 5

Artikel: Das Imaginäre in der Geometrie
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14325

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band IV Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 15. September 1949

Das Imaginäre in der Geometrie

1. *Einleitung*

Imaginäre Gebilde lassen sich auf wesentlich verschiedene Arten durch reelle Bilder veranschaulichen. Die übliche Abbildung der komplexen Zahlen $z = x + i y$ im rechtwinkligen (x, y)-System oder auf der Riemannschen Zahlenkugel eignet sich insbesondere zur anschaulichen Darstellung dafür, welchen Bereich eine analytische Funktion $w = f(z)$ irgendeinem Bereiche der unabhängigen Variablen z zuordnet. Wie nützlich auch diese Darstellung für viele Untersuchungen ist, so läßt sie den Geometer in einer Hinsicht doch unbefriedigt. Die ∞^2 komplexen Punkte einer Geraden, z. B. die Punkte $x = a + i a'$ (a, a' reell) der x-Achse, werden durch die reellen Punkte einer *Ebene* versinnbildlicht, wodurch die nichtreellen Punkte der Geraden von dieser als ihrem Träger losgelöst erscheinen. Will man Geometrie in der Ebene mit Einschluß des Komplexen pflegen, so müßte man bei Festhalten der in der Funktionentheorie üblichen Darstellung jeder Geraden der Ebene eine besondere Ebene zuordnen, um die reellen Bilder der komplexen Punkte der betreffenden Geraden unterzubringen.

Bekanntlich hat VON STAUDT[1]) diejenige reelle Darstellung der komplexen Elemente des Raumes (Punkt, Gerade, Ebene) gefunden, welche unmittelbar dem Wesen der Sache entspricht. Der Grund dafür, daß eine selbstverständliche Handhabung dieser Darstellung noch verhältnismäßig wenig verbreitet ist, liegt wohl darin, daß man die von-Staudtsche Theorie gewöhnlich sogleich rein projektiv entwickelt. Natürlich bildet die projektive Theorie der Involutionen den Kern der Sache. Zur Einführung fragt es sich jedoch, ob man dem Anschauungsvermögen nicht entgegenkommen kann durch eine handgreiflichere Verbildlichung der Involutionen. Die folgenden Ausführungen[2]) sollen zeigen, daß dies wohl möglich ist. Um nur wenige Kenntnisse vorauszusetzen, wollen wir hierbei von vornherein auch metrische Begriffe verwenden. Unser Ziel sei, isotrope Geraden, imaginäre Kegelschnitte, imaginäre Tangenten, die geradlinigen Erzeugenden einer Kugel usw. zu einer Anschaulichkeit zu bringen, die mehr als ein bloß schematisches Bild bedeutet, welches man sich natürlich auf mannigfache Art verschaffen kann. Im ersten Teil beschränken wir uns in der Hauptsache auf die komplexen Elemente einer reellen Ebene. Im zweiten Teil werden die wesent-

[1]) G. K. CHR. VON STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Erstes Heft, 1856.

[2]) Mehrere Zuschriften an die Redaktion der vorliegenden Zeitschrift zeigen, daß hierfür Interesse vorhanden ist. Die hier gegebene Darstellung gibt eine knappe Zusammenfassung eines Abschnittes einer Vorlesung *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* im Sommer 1949.

lich komplizierteren Verhältnisse im Raume beschrieben. Hierbei bemühen wir uns, vor allem die anschaulichen Bilder zu vermitteln und die Beweise nur knapp so weit anzuführen, als es für die sich dafür Interessierenden nötig ist.

2. *Der Pfeil eines imaginären Punktes*

Zunächst führen wir den Grundbegriff ein, mit dem wir ständig arbeiten.

Die Punkte einer Geraden g seien zu Paaren A, A_1 und B, B_1 und C, C_1 usw. derart zusammengefaßt, daß für einen gewissen festen Punkt M von g und ein beliebiges Paar P, P_1 die Beziehung

$$MP \cdot MP_1 = k = \text{konstant} \tag{1}$$

besteht. Eine solche Paarung heißt *Involution*[1]; M ist der Mittelpunkt, k die Potenz der Involution. Der dem Mittelpunkt M gemäß (1) zugeordnete Punkt ist der unendlichferne Punkt von g.

Hierbei werden die Strecken MP, MP_1 mit demselben Vorzeichen in Rechnung gesetzt, sofern die Richtung von M nach P mit der Richtung von M nach P_1 übereinstimmt. Je nachdem die Konstante k, die Potenz der Involution, positiv oder negativ ist, haben also die Strecken MP, MP_1 irgendeines Paares dieselben oder entgegengesetzte Richtungen. Wählen wir auf der Geraden g den Nullpunkt und Einheitspunkt eines Koordinatensystems, und sind a, x, x_1 die Koordinaten von M, P und P_1, so wird die Involution also durch die Beziehung $(x - a)(x_1 - a) = k$ (a, k reell) festgelegt. Bei positivem k heißt die Involution *hyperbolisch*, für negatives k *elliptisch*. Für $k = 0$ ergibt sich die «ausgeartete Involution», in der jedes Paar zugeordneter Punkte den Mittelpunkt enthält.

Wir erinnern noch an einige sich aus der Erklärung leicht ergebende Eigenschaften der Involutionen:

Jede Involution geht durch Projizieren in eine gleichartige Involution über.

Eine Involution ist bestimmt durch zwei Paare A, A_1 und B, B_1 zugeordneter Punkte.

In einer elliptischen Involution trennen sich zwei Paare zugeordneter Punkte.

Ist A, A_1 ein Paar zugeordneter Punkte einer elliptischen Involution, so gibt es genau ein Paar B, B_1 dieser Involution, das A, A_1 *harmonisch* trennt. Die Konstruktion von B, B_1 zu gegebenem A geben wir an späterer Stelle[2]).

Eine nicht ausgeartete Involution enthält genau zwei Doppelpunkte, d. h. zwei Punkte, die sich selbst zugeordnet sind. In der Tat liefert die Gleichung $(x - a)(x - a) = k$ die beiden Lösungen $x = a \pm \sqrt{k}$. Die Doppelpunkte sind reell für eine hyperbolische, komplex für eine elliptische Involution. Jedes Paar P, P_1 zugeordneter Punkte trennt in beiden Fällen die Doppelpunkte harmonisch.

Durchläuft P die Punktreihe in einem bestimmten Sinne, so durchläuft der in einer elliptischen Involution zugeordnete Punkt P_1 die Punktreihe im gleichen

---

[1]) Dieser merkwürdige Name wurde geprägt von G. DESARGUES in seiner Schrift: *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan* (Paris 1639). Der Übersetzer M. ZACHARIAS (Ostwalds Klassiker, Nr. 197) sagt hierzu: Das Wort (Involution) bezeichnet den Zustand des Eingerolltseins, wie er bei den Jugendzuständen von Sproßteilen vorkommt.

[2]) Für die Involutionen, die als Schnitte eines vollständigen Vierecks oder eines Kreisbüschels usw. auftreten, sei etwa auf das noch immer vorzügliche Werk *Die Geometrie der Lage* (Erste Abteilung) von TH. REYE hingewiesen.

Sinne, bei einer hyperbolischen Involution hingegen im entgegengesetzten Sinne. Wir können die Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution als *die Treffpunkte dieser entgegengesetzten Bewegungen* auffassen. Bei einer elliptischen Involution treffen sich die zugeordneten Punkte P, P_1 im Reellen nicht. Die elliptische Involution bestimmt aber eindeutig zwei imaginäre[1]) Punkte als Doppelpunkte. Durchläuft P die Punktreihe in einem bestimmten Sinne, so wird durch eine elliptische Involution dieser Bewegung von P eine gleichsinnige Bewegung des entsprechenden Punktes P_1 zugeordnet.

Diese koordinierten Bewegungen betrachten wir als reelles Bild des einen imaginären Doppelpunktes; der andere imaginäre Doppelpunkt wird gegeben durch die koordinierten Bewegungen in entgegengesetzter Richtung. Kurz: Eine *gerichtete* elliptische Involution stellt einen imaginären Punkt dar, und umgekehrt kann jeder imaginäre Punkt der betrachteten Geraden durch eine gerichtete elliptische Involution gegeben werden.

Für eine lebendige Anschauung sind diese koordinierten Bewegungen das Wesentliche. Die Bewegungen lassen sich aber in *einem* geometrischen Bilde nicht festhalten. Wir wollen deshalb ein *Zeichen* einführen, das diese Bewegungen (d. h. die gerichtete elliptische Involution) eindeutig festlegt. Wir geben den Mittelpunkt M der Involution und einen der beiden Hauptpunkte N, N_1. Das sind die beiden einander zugeordneten Punkte, die von M denselben Abstand haben. Ist h dieser Abstand und hat M die Koordinate a, so lautet die Gleichung der elliptischen Involution

$$(x - a)\,(x_1 - a) = -h^2. \tag{2}$$

Der von M nach N oder N_1 weisende Pfeil sei das geometrische Zeichen für die gerichtete elliptische Involution (Fig. 1). Der Pfeil MN bestimmt den einen, der Pfeil MN_1 den anderen (konjugiert komplexen) Doppelpunkt der elliptischen Involution.

Durchläuft der Punkt P die Strecke MN, so bewegt sich der entsprechende Punkt P_1 im gleichen Sinne vom unendlichfernen Punkt nach N_1; bewegt sich P von N aus weiter, so läuft P_1 von N_1 gegen M hin.

Jedem imaginären Punkt auf der betrachteten Geraden ist auf diese Weise ein Pfeil zugeordnet[2]). Wird der Imaginärteil der Koordinate $a + ih$ Null, so strebt auch die Länge des Pfeiles gegen Null. Wir sagen deshalb auch, daß den reellen Punkten Pfeile der Länge Null entsprechen.

Die imaginären Punkte auf der unendlichfernen Geraden einer Ebene lassen sich allerdings nicht durch Pfeile geben. Wir werden darauf noch zurückkommen.

Ist eine gerichtete elliptische Involution durch den Pfeil MN auf der Geraden g gegeben und soll die harmonische Darstellung ABA_1B_1 dieser Involution von dem gegebenen Punkte A aus konstruiert werden, so kann man wie folgt vorgehen (Fig. 2): Um M zeichne man den Kreis mit dem Radius MN und wählt den einen Kreispunkt L, für den LMN ein rechter Winkel ist. A_1 ist der Schnittpunkt der zu

---

[1]) Es ist üblich, nicht von komplexen, sondern von imaginären Punkten zu sprechen, auch wenn die Koordinate nicht rein imaginär ist.

[2]) In dem Buche *Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen* (Leipzig und Berlin 1911) verwendet E. STUDY für die Geometrie der Ebene die Darstellung eines imaginären Punktes durch ein Paar reeller Punkte, z. B. durch das Paar N, N_1 in obiger Bezeichnung.

Für die historische Entwicklung vergleiche man die Arbeit von A. RAMORINO, *Gli elementi imaginari nella geometria*, Giornale di Matematiche *35*, 242 (1897).

AL normalen Geraden durch L mit g. Die Winkelhalbierenden des rechten Winkels ALA_1 liefern B, B_1. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Punktfolge ABA_1B_1 die Richtung des Pfeiles besitzt.

3. *Die imaginären Punkte in der Ebene und im Raume*

Die Gesamtheit der ∞^4 Pfeile (eingeschlossen die Pfeile von der Länge Null) der Ebene stellen uns die Zeichen der sämtlichen imaginären und reellen Punkte der Ebene dar. Hat ein Punkt P in einem rechtwinkligen (x, y)-System (mit gleichen Einheiten auf beiden Achsen) die komplexen Koordinaten $x = a + i\,a'$, $y = b + i\,b'$ (a, a', b, b' reell), so findet man den Pfeil MN von P gemäß Figur 3: Der Punkt wird dargestellt durch die gerichtete elliptische Involution mit dem Mittelpunkt $M(a, b)$, der Potenz $-(a'^2 + b'^2)$ und dem Sinne $(a, b) \rightarrow (a + a', b + b')$. (In der Figur sind a' und b' positiv angenommen.)

Ebenso einfach ergibt sich: Der Punkt $P(x, y, z)$ im Raume mit den Koordinaten $x = a + i\,a'$, $y = b + i\,b'$, $z = c + i\,c'$ wird gegeben durch die gerichtete Involution mit dem Mittelpunkt $M(a, b, c)$, der Potenz $-(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ und dem Sinne $(a, b, c) \rightarrow (a + a', b + b', c + c')$.

Hiermit ist jedem (vorläufig unter Ausschluß der unendlichfernen Punkte) der ∞^6 Raumpunkte, deren Koordinaten beliebige komplexe Zahlen sind, umkehrbar eindeutig ein geometrisches Gebilde zugeordnet. Nochmals sei betont, daß wir hierbei die durch eine gerichtete elliptische Involution gegebenen koordinierten Bewegungen als das sachgemäße Bild betrachten; der Pfeil ist uns nur ein Kurzzeichen für diese Bewegungen.

4. *Die Geraden einer Ebene*

Liegt eine gerichtete elliptische Involution (etwa gegeben durch einen Pfeil) auf der Geraden l vor und projiziert man deren Punkte von einem beliebigen außerhalb l liegenden Punkte S aus, so wird im Strahlenbüschel (S) eine gerichtete elliptische Strahleninvolution festgelegt. Eine besondere elliptische Strahleninvolution in (S) ist die *Rechtwinkelinvolution,* in der jeder Geraden durch S die zu ihr normale Gerade durch S zugeordnet wird. Es ist nicht nötig, näher zu erklären, was unter der harmonischen Darstellung aba_1b_1 einer gerichteten elliptischen Strahleninvolution zu verstehen ist.

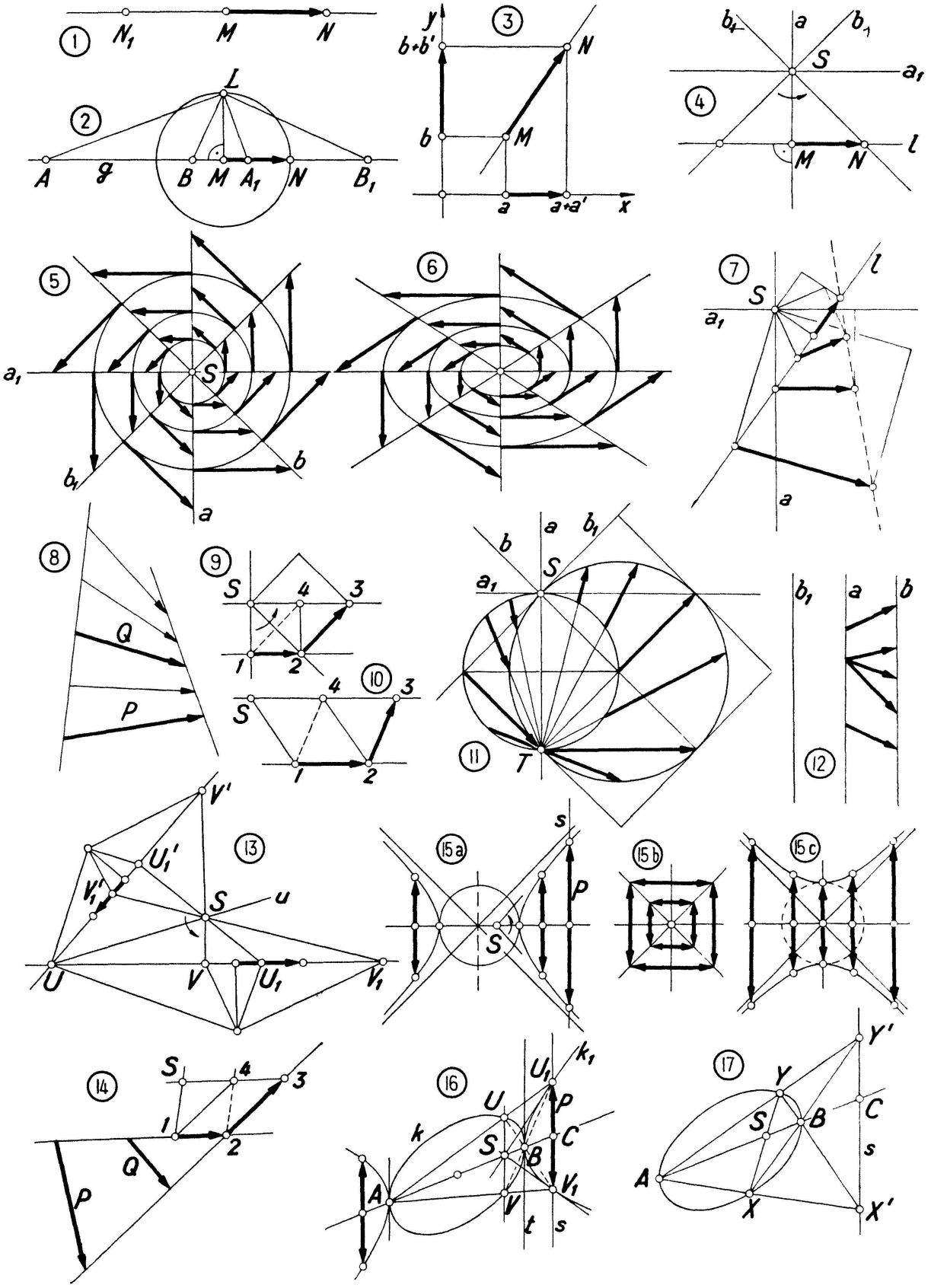
Es erweist sich gemäß dem Dualitätsgesetz in der Ebene als sachgemäß, zu erklären: *Eine gerichtete elliptische Strahleninvolution ist das Bild einer imaginären Geraden.* Da es im Raume imaginäre Gerade gibt, die sich nicht auf diese Weise geben lassen, nennen wir die eben eingeführten imaginären Geraden *spezielle* imaginäre Geraden[1]). Daß zwischen den imaginären Geraden der Ebene und den gerichteten elliptischen Strahleninvolutionen eine umkehrbar eindeutige Beziehung besteht, wird sich aus dem folgenden ergeben.

Der imaginäre Punkt $P(ABA_1B_1)$ liegt in der reellen Geraden g, wenn die Elemente der Involution ABA_1B_1, das heißt der Pfeil von P[2]) in g liegt. Durch einen

---

[1]) Eine dem Pfeil entsprechende Darstellung der imaginären Geraden ist durch Auszeichnung eines Punktes der Ebene (wie die Pfeildarstellung eines Punktes durch Auszeichnung der unendlichfernen Geraden) möglich, jedoch würde die Ausführung an dieser Stelle zu weit gehen.

[2]) Wir sagen im folgenden auch abgekürzt «der Pfeil P».


1
N1
M
N
2
L
A
g
B
M
A1
N
B1
3
y
b+b'
N
b
M
a
a+a'
x
4
b1
a
b1
S
a1
M
N
l
5
a1
S
b1
b
a
6
7
S
l
a1
a
8
Q
P
9
S
4
3
1
2
10
4
3
S
1
2
11
a
b1
b
S
a1
T
12
b1
a
b
13
V'
U1'
V1'
S
u
U
V
U1
V1
15a
s
P
S
15b
15c
14
S
4
3
1
2
Q
P
16
U1
k1
U
P
k
S
C
B
A
V
V1
t
s
17
Y'
Y
C
S
B
s
A
X
X'

Figuren 1–17

imaginären Punkt geht somit (in der Ebene) genau eine reelle Gerade. Der imaginäre Punkt $P(ABA_1B_1)$ liegt in der imaginären Geraden $g(abA_1b_1)$, wenn die darstellenden Punkt- und Strahleninvolutionen einschließlich ihres Sinnes perspektiv sind. In einer imaginären Geraden liegt genau ein reeller Punkt, nämlich der Träger S der die Gerade darstellenden gerichteten elliptischen Involution.

Nun wollen wir uns einen Überblick über die sämtlichen imaginären Punkte einer imaginären Geraden verschaffen. (Die sämtlichen Punkte einer reellen Geraden g werden einfach durch alle Pfeile, die in g liegen, dargestellt.) Es genügt hierzu, die Verhältnisse bei einer *isotropen* Geraden zu untersuchen, d. h. bei einer imaginären Geraden, die durch eine gerichtete Rechtwinkelinvolution gegeben ist.

Ist a, a_1 ein Rechtwinkelpaar (Fig. 4) und b, b_1 das zu a, a_1 harmonisch liegende Rechtwinkelpaar, so schneidet die zu a senkrechte Gerade l die gerichtete Rechtwinkelinvolution in einer gerichteten elliptischen Punktinvolution, deren Pfeildarstellung MN sofort anzugeben ist: M ist der Schnitt von l mit a, N der Schnitt von l mit b[1]). Hiernach lassen sich die sämtlichen Punkte einer isotropen Geraden leicht überschauen. Fig. 5 deutet die entsprechenden Pfeile an. Kurz: *Eine isotrope Gerade liefert einen rotatorischen ebenen Wirbel.* Der einzige reelle Punkt der isotropen Geraden ist der Wirbelmittelpunkt.

Jede Strahleninvolution kann offenbar durch eine Affinität, sogar durch eine orthogonale Affinität in eine Rechtwinkelinvolution übergeführt werden. Hieraus ergibt sich das Bild (Fig. 6) für die imaginären Punkte irgendeiner imaginären Geraden der Ebene. *Eine spezielle imaginäre Gerade liefert einen ebenen Wirbel.*

Wir geben weiter das Bild für alle diejenigen Punkte einer imaginären Geraden, für welche die Anfangspunkte ihrer Pfeile einer Geraden l angehören. Figur 7 zeigt dies für eine isotrope Gerade. Die Endpunkte der Pfeile liegen in einer Geraden. (Dies schließt man etwa mit Hilfe des folgenden Satzes: Verändert sich ein Quadrat derart, daß eine Ecke S festliegt und eine Nachbarecke von S eine Gerade beschreibt, so beschreiben auch die übrigen zwei Ecken Gerade.) Hieraus folgt durch Affinität:

Gehören die Anfangspunkte von Pfeilen, die Punkte einer speziellen imaginären Geraden g darstellen, einer Geraden l an, so bilden die Endpunkte eine zur Reihe der Anfangspunkte ähnliche Punktreihe.

Sind zwei Punkte P, Q (d. h. ihre Pfeile) einer speziellen imaginären Geraden gegeben, so lassen sich auf Grund dieses Satzes leicht weitere Punkte dieser Geraden konstruieren (Fig. 8).

Zwei Pfeile nennen wir *zusammenhängend*, wenn der Endpunkt des einen der beiden Pfeile zugleich der Anfangspunkt des andern ist. Zwei zusammenhängende Pfeile haben zum Träger S (zum reellen Punkt) der Geraden eine besondere Lage, deren Beachtung uns noch nützlich sein wird. Fig. 9 zeigt zwei solche Pfeile *12, 23*, die einer isotropen Geraden angehören (d. h. Punkte dieser Geraden darstellen). Hieraus folgt durch Affinität die in Fig. 10 gegebene Konstruktion des Trägers S der Geraden, von der zwei zusammenhängende Pfeile *12,23* gegeben sind: *1234* und *124S* sind Parallelogramme.

Fig. 11 zeigt schließlich noch diejenigen Pfeile einer speziellen imaginären Geraden, die in den reellen Geraden eines Büschels (T) liegen. (In der Figur ist eine isotrope Gerade angenommen; der allgemeine Fall ergibt sich durch affine Umformung.)

[1]) In Fig. 4 sind die Bezeichnungen b und b_1 zu vertauschen.

Es ist noch ein Spezialfall zu erwähnen: Eine gerichtete elliptische Strahleninvolution $a b a_1 b_1$ in einem Büschel paralleler Geraden gibt eine spezielle imaginäre Gerade mit unendlichfernem Träger S. Die Anfangspunkte aller Pfeile dieser Geraden liegen in der Geraden a des Büschels, der in der Involution die unendlichferne Gerade a_1 zugeordnet ist, die Endpunkte liegen in einer Geraden b, deren zugeordnete b_1 von a denselben Abstand hat wie b (Fig. 12).

Die erläuterte Lage der Pfeile, welche die Punkte einer imaginären Geraden liefern, läßt sich auch leicht analytisch aus der Gleichung $A x + B y + C = 0$ herleiten, wobei A, B, C beliebige komplexe Koeffizienten sind.

Schneidet man eine gerichtete elliptische Strahleninvolution mit der unendlichfernen Geraden der Ebene, so ergibt sich als Schnitt eine gerichtete elliptische Punktinvolution, die einen imaginären Punkt dieser Geraden bestimmt.

5. *Verbinden und Schneiden in der Ebene*

A. Zwei Punkte P, Q bestimmen genau eine Gerade g, die P und Q enthält.

B. Zwei Gerade p, q bestimmen genau einen Punkt G, der auf p und q liegt.

Beweis zu A. Sind P, Q reell, so ist nichts zu beweisen. Ist P reell und Q imaginär, so ist g imaginär, sofern P nicht auf der Geraden des Pfeiles Q liegt. P ist der Träger der g darstellenden, zur Involution von Q perspektiven Strahleninvolution.

Sind P, Q imaginär, so ist g imaginär, sofern P, Q nicht derselben reellen Geraden angehören. g muß dargestellt werden durch eine gerichtete elliptische Strahleninvolution, die zu den P und Q darstellenden gerichteten Punktinvolutionen einschließlich des Sinnes perspektiv ist. Ist U der Schnittpunkt (Fig. 13) der Geraden der Pfeile P, Q, so bestimme man die harmonischen Darstellungen UVU_1V_1, $UV'U_1'V_1'$ (nach Fig. 2) der P, Q darstellenden Involutionen. Die Verbindungsgeraden $U_1U_1' = u_1$, $VV' = v$, $V_1V_1' = v_1$ gehen dann durch einen Punkt S. Die Geraden $u = SU$, u_1, v, v_1 bestimmen die gerichtete elliptische Strahleninvolution $u v u_1 v_1$, welche die gesuchte Gerade g darstellt.

Einfacher ist die in Fig. 14 gegebene Konstruktion mit Hilfe der früher gemachten Bemerkung über zusammenhängende Pfeile. Zunächst kann man aus den Pfeilen P, Q gemäß dem Satze zu Fig. 8 leicht die zusammenhängenden Pfeile *12*, *23* konstruieren, wobei *12* der Geraden durch die Anfangspunkte, *23* der Geraden durch die Endpunkte der Pfeile P, Q angehören.

Beweis zu B. Wir betrachten sofort den Fall, in dem p und q imaginär sind und verschiedene reelle Mittelpunkte S, S' haben. Ist u die Verbindungsgerade SS', so bestimme man (etwa mit Hilfe eines geraden Schnittes) die harmonischen Darstellungen $u v u_1 v_1$, $u v' u_1' v_1'$ der beiden p, q gebenden Strahleninvolutionen. $V = v v'$, $V_1 = v_1 v_1'$, $U_1 = u_1 u_1'$ liegen dann in einer reellen Geraden g. Ist noch U der Schnittpunkt $u g$, so liefert die gerichtete Involution UVU_1V_1 den gesuchten Schnittpunkt G.

Hiermit beherrscht man die Operationen Verbinden und Schneiden in der komplexen Geometrie der Ebene. Wie die *Stetigkeit* im komplexen Gebiet erklärt wird, ist aus der Stetigkeit im entsprechenden Gebiet der Pfeile ohne weiteres klar. Auf die Anordnungssätze können wir hier nicht näher eingehen.

6. *Die imaginären Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes*

Wir geben die Konstruktionen und deuten nachträglich den Beweis an. Fig. 15*a* zeigt die Verhältnisse für einen Kreis. Man konstruiere eine zum Kreis konzentrische gleichseitige Hyperbel, für welche die Länge der Hauptachse gleich dem Kreisdurchmesser ist. Die zur Hauptachse senkrechten Halbsehnen liefern Pfeile (mit den Spitzen auf der Hyperbel), welche sämtlich imaginäre Punkte des Kreises darstellen. Die Tangente im imaginären Punkte P ergibt sich wie folgt: Man bestimme den Pol S der Geraden s, welche den Pfeil P trägt. Die gerichtete Strahleninvolution in S, die perspektiv ist zur P darstellenden Punktinvolution, liefert die Tangente. Um sämtliche Punkte des Kreises zu erhalten, hat man die Figur 15*a* um den Kreismittelpunkt zu drehen. Man beachte insbesondere: Es ist aus dem Pfeilfeld des Kreises sofort zu sehen, daß *jeder* Kreis zwei bestimmte imaginäre Punkte der unendlichfernen Geraden enthält, nämlich diejenigen Punkte, welche von den gerichteten Rechtwinkelinvolutionen (isotrope Geraden) aus jener Geraden geschnitten werden. Um die Tangenten von einem inneren Punkte S des Kreises an diesen zu legen, hat man einen ebenen Wirbel mit dem Mittelpunkt S zu bestimmen, der mit dem Kreis *einen* Pfeil gemeinsam hat. Das Pfeilfeld des Kreises zeigt unmittelbar anschaulich, daß die Tangenten vom Kreismittelpunkt aus die isotropen Geraden dieses Punktes sind.

Läßt man den Radius des Kreises gegen Null streben, so verwandelt sich sein Pfeilfeld in einen doppelten rotatorischen Wirbel (Figur 15*b*, die zwei isotropen Geraden des Mittelpunktes). Fig. 15*c* deutet noch die Punkte eines imaginären Kreises an.

Um die imaginären Punkte und Tangenten eines beliebigen reellen Kegelschnittes zu konstruieren, führen wir den Begriff der *harmonischen Spiegelung* ein. Ist A ein nicht auf der Geraden t liegender Punkt, so bedeutet die harmonische Spiegelung einer Figur $UVW\ldots$ an A und t die zentrische Kollineation mit dem Zentrum A, der Achse t und der Charakteristik -1. Um den Spiegelpunkt U_1 zu U zu konstruieren, hat man also den Strahl AU mit t zu schneiden und den Punkt U_1 zu bestimmen, der mit U den Punkt A und jenen Schnittpunkt harmonisch trennt.

Es sei jetzt irgendein Kegelschnitt k vorgelegt. Wir wollen die Schnittpunkte mit einer Schar paralleler (reeller) Geraden bestimmen. s sei eine Gerade der Schar (Fig. 16), die k nicht reell trifft. Man konstruiere zuerst eine zu s parallele Tangente t, B sei deren Berührungspunkt, A der zweite Endpunkt des Durchmessers durch B. Nun spiegle man k harmonisch an A und t. Es entsteht ein Kegelschnitt k_1, der k in A und B berührt. AB schneidet s im Anfangspunkt C der Pfeile CU_1 und CV_1, deren Endpunkte k_1 angehören. Diese Pfeile stellen die imaginären Schnittpunkte P, Q von s mit k dar.

Führt man diese Konstruktion für alle k nicht reell schneidenden Geraden aus, so erhält man sämtliche imaginären Punkte von k. (Bei einer Parabel k wird k_1 eine zu k kongruente Parabel.)

Um im Punkte P die Tangente zu konstruieren, bestimme man den Pol S der Geraden s durch den Pfeil P. Die gerichtete elliptische Strahleninvolution in S, die zur P darstellenden Involution perspektiv ist, liefert die gesuchte Tangente.

Der Beweis der angegebenen Konstruktion ergibt sich aus dem Satze: Das Nebendreieck eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Viereckes ist ein

Polardreieck. Dreht sich in Fig. 17 XY um den Punkt S, so beschreiben somit die Nebenecken X', Y' des vollständigen Viereckes $ABXY$ die Polare s von S; ferner sind X', Y' konjugiert, beschreiben also die von k auf s erzeugte Punktinvolution[1]). Die Punkte U_1, V_1 in Fig. 16 sind hierbei diejenigen zugeordneten Punkte dieser Involution, welche deren Mittelpunkt C und den unendlichfernen Punkt von s harmonisch trennen.

Hiermit haben wir einen anschaulichen Überblick über sämtliche imaginäre Punkte und Tangenten eines reellen Kegelschnittes gewonnen. Es ist leicht, dies auch auf nullteilige Kegelschnitte zu übertragen. Im folgenden wollen wir uns aber den imaginären Elementen im Raume zuwenden. (Schluß folgt.) L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Über das Rechnen mit Größen

1. *Größen*

Bereits im täglichen Leben und viel mehr noch in der Physik und in den Naturwissenschaften kommen wir in die Lage, Größen (Längen, Flächen, Zeiten, Kräfte, Energien, Spannungen usw.) zu messen. Dabei untersuchen wir, wie oft eine Einheit derselben Art in der gegebenen Größe enthalten ist. Wir bestimmen also eine *Quantität*, die einen reinen Zahlenwert darstellt. Die Größe besitzt aber auch eine *Qualität*, die in vernünftiger Weise der Zahl zuzuordnen ist. Eine Größe – wir beschränken uns hier auf die physikalischen – hat demnach immer zwei Merkmale: Quantität und Qualität.

Für jede Art von Größen könnten wir eine beliebige Einheit (cm, m^2, s, kg usw.) wählen und damit die Erscheinung zahlenmäßig erfassen. So könnten wir mit einem quadratischen Blech von 1 m Seitenlänge Flächen ausmessen. Für eine wissenschaftliche Erkenntnis genügt dies allein nicht, zudem wäre die Messung praktisch oft kaum ausführbar. Gewisse Größen verschiedener Art können nach bestimmten, in diesem Falle physikalischen Gesetzen zusammenhangen, und dies gilt auch für ihre Einheiten. Der Wunsch, die Größen und ihre Einheiten zu ordnen, führt zu den Begriffen Dimension und Maßsystem.

Es stellt sich hier die oft aufgeworfene Frage, ob zum Beispiel der Ausdruck $F = a \cdot b$ für die Fläche eines Rechteckes bloß eine reine Zahlengleichheit darstelle oder ob die Größen als solche in Verbindung treten. Die Antwort erscheint nicht eindeutig, da manche Schulbücher in dieser Hinsicht unklar oder inkonsequent sind. So werden in einem bekannten Geometrielehrbuch[2]) die Strecken $a, b, c, \ldots$ durchweg als Größen behandelt, während im Ausdruck $a \cdot b$ für a und b nur noch die Maßzahlen zugelassen werden[3]).

---

[1]) Ein nicht ausgearteter Kegelschnitt k erzeugt auf jeder reellen Geraden s seiner Ebene eine Involution, nämlich die Involution konjugierter Punkte auf s. Ist die Involution hyperbolisch, so stellen die Doppelpunkte die diesfalls reellen Schnittpunkte von s mit k dar. Ist die Involution elliptisch, so sind ihre imaginären Doppelpunkte die gemeinsamen Punkte von s und k.

[2]) F. GONSETH und P. MARTI, *Planimetrie*, 1. Teil (Zürich 1933), S. 137–139. Ebenso W. BENZ, *Stereometrie* (Zürich 1938), S. 172.

[3]) Dagegen wird im Buch von L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Basel 1948) ausdrücklich auf Größengleichungen eingegangen.