

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

tors und des zugehörigen Bogens  $b$ . Die Differenz aus  $b$  und der entsprechenden Sehne  $2s$  liegt in den Grenzen:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{ps}{r} + \frac{4}{15} \cdot \frac{p^2s}{r^2} < b - 2s < \frac{2}{3} \cdot \frac{ps}{r} + \frac{4}{15} \cdot \frac{p^2s}{r^2} + \frac{p^3s(4r-p)}{10r^4}. \quad (16)$$

Diese Abschätzung kann für die Berechnung des Kreisumfanges verwendet werden.

G. GRIMM, Herrliberg-Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### I. Ein topologischer Satz über endliche geschlossene Kurven in der Ebene

1. Eine Kurve wird endlich genannt, wenn sie eine endliche Bogenlänge besitzt. Wir nehmen im folgenden an, daß die ebenen Kurven  $C$  und  $K$  endlich, geschlossen und einzigig sind, eine endliche Anzahl  $\nu$  von Schnittpunkten haben und daß diese Schnittpunkte verschieden sind. Es wird noch angenommen, daß  $K$  eine Jordansche Kurve (ohne Doppelpunkt) sei und daß  $C$  eine endliche Anzahl von Doppelpunkten besitze. Dann ist  $\nu = 2n$  eine gerade Zahl.

Bezeichnen  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  die Schnittpunkte der Kurven  $C$  und  $K$  und auch ihre Aufeinanderfolge auf der Kurve  $C$  bei einer Beschreibung von  $C$ , so ist die Aufeinanderfolge dieser  $2n$  Punkte auf  $K$  eine Permutation  $P$  der  $2n$  Elemente  $A_h$  ( $h = 1, 2, \dots, 2n$ ). Bezeichnen  $A_h^*$  ( $h = 1, 2, \dots, 2n$ )  $2n$  Punkte auf einem Kreis  $K^*$ , deren Aufeinanderfolge bei positivem Umlaufen von  $K^*$  mit derjenigen der Punkte  $A_h$  auf der Kurve  $K$  übereinstimmt, gibt es ferner im Kreise  $K^*$  unter den  $n$  ungeraden bzw. geraden Sehnen

$$A_{2k-1}^* A_{2k}^* \text{ bzw. } A_{2k}^* A_{2k+1}^* \quad (k = 1, 2, \dots, n; A_{2n+1}^* \equiv A_1^*)$$

$m_1$  bzw.  $m_2$  sich schneidende Sehnenpaare und liegt der Bogen  $\widehat{A_1 A_2}$  von  $C$  innerhalb von  $K$ , so besitzt die Kurve  $C$  mindestens  $m_1$  bzw.  $m_2$  Doppelpunkte innerhalb bzw. außerhalb von  $K$ .

Zum Beweis dieses Satzes bezeichnen wir mit  $\gamma_k$  bzw.  $\delta_k$  den Bogen von  $C$  zwischen den auf  $C$  aufeinanderfolgenden Punkten  $A_{2k-1}, A_{2k}$  bzw.  $A_{2k}, A_{2k+1}$ . Dann liegen die Bogen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  bzw.  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  innerhalb bzw. außerhalb der Kurve  $K$ .

Wir nehmen erstens an, daß sowohl die Punkte  $A_h$  und  $A_h^*$  als auch die Kurven  $K$  und  $K^*$  übereinstimmen. Schneiden die Sehnen  $A_{2i-1} A_{2i}$  und  $A_{2k-1} A_{2k}$  bzw.  $A_{2i} A_{2i+1}$  und  $A_{2k} A_{2k+1}$  einander, so trennen die Punktpaare  $A_{2i-1} A_{2i}$  und  $A_{2k-1} A_{2k}$  bzw.  $A_{2i} A_{2i+1}$  und  $A_{2k} A_{2k+1}$  auf  $K$  einander. Dann werden also die Endpunkte des Bogens  $\gamma_i$  bzw.  $\delta_i$  von den Endpunkten des Bogens  $\gamma_k$  bzw.  $\delta_k$  auf  $K$  getrennt.

Bezeichnet  $\gamma_{i0}$  einen Teilbogen von  $\gamma_i$  mit den Endpunkten  $A_{2i-1}, A_{2i}$ , der sich in keinem Punkte schneidet oder berührt, so wird die Kreisscheibe  $K \equiv K^*$  von  $\gamma_{i0}$  in zwei Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  geteilt. ( $\gamma_i$  kann mit  $\gamma_{i0}$  zusammenfallen.) Trennen die Endpunkte von  $\gamma_i$  die Endpunkte von  $\gamma_k$ , so gehört der eine Endpunkt von  $\gamma_k$  zu  $\mathfrak{B}_1$ , der andere aber zu  $\mathfrak{B}_2$ . Der Bogen  $\gamma_k$  muß also den Bogen  $\gamma_{i0}$  mindestens einmal schneiden. Die Schnittpunkte sind Doppelpunkte der Kurve  $C$ .

Die Inversion in bezug auf den Kreis  $K \equiv K^*$  führt den Bogen  $\delta_k$  von  $C$  in einen innerhalb von  $K$  liegenden Bogen  $\delta'_k$  mit denselben Endpunkten über. Schneiden die Kreissehnen  $A_{2i} A_{2i+1}$  und  $A_{2k} A_{2k+1}$  einander, so trennen die Endpunkte der Bogen  $\delta'_i$  und  $\delta'_k$  auf  $K$  einander. Dann haben  $\delta'_i$  und  $\delta'_k$  innerhalb von  $K$ , und ihre inversen Bogen  $\delta_i$  und  $\delta_k$  außerhalb von  $K$  mindestens einen Schnittpunkt.

Damit ist der Satz für den Fall  $A_h \equiv A_h^*$  ( $h = 1, 2, \dots, 2n$ ) bewiesen.

Es gibt offenbar eine topologische (d. h. eine eindeutige und beiderseits stetige) Transformation  $T$  einer beide Kurven  $C$  und  $K$  enthaltenden Kreisscheibe  $K_0$  auf sich selbst, wodurch die Jordan-Kurve  $K$  auf einen Kreis  $K'$  abgebildet wird. Führt diese Transformation die Kurve  $C$  in die Kurve  $C'$  über, so führt sie die Doppelpunkte von

$C$  in die Doppelpunkte von  $C'$ , die Schnittpunkte  $A_h$  der Kurven  $C$  und  $K$  in die Schnittpunkte der Kurven  $C'$  und  $K'$  über. Bei dieser Abbildung stimmt die Aufeinanderfolge der Punkte  $A_h$  auf  $C$  bzw.  $K$  mit der Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte  $A'_h$  auf  $C'$  bzw.  $K'$  überein. Daraus folgt der Satz allgemein.

2. Der Kreis  $K^*$  läßt sich im Satz offenbar durch jede konvexe Kurve, sogar durch ein konkaves Vieleck ersetzen.

Ein  $p$ -facher Punkt ist im Satz als ein Zusammenfallen von  $p(p-1)/2$  Doppelpunkten zu rechnen.

Es wurde angenommen, daß die Schnittpunkte der Kurven  $C$  und  $K$  einfach sind. Die Gültigkeit des Satzes bleibt auch dann bestehen, wenn  $C$  in einem Punkte  $A_h$  von  $K$  berührt wird. Dann ist  $A_h \equiv A_{h+1}$  und die Sehne  $A_h A_{h+1}$  und damit der entsprechende Bogen  $A_h \widehat{A}_{h+1}$  von  $C$  schrumpfen in einen Punkt zusammen. Ist  $A_h$  ein Doppelpunkt, so ist  $A_h \equiv A_k$  ( $h < k$ ). Ist  $k = h + 1$ , so besteht die Sehne  $A_h A_{h+1}$  aus einem Punkt, der Bogen  $A_h \widehat{A}_{h+1}$  bildet aber eine geschlossene Kurve. Ist  $k > h + 1$ , so haben zwei Sehnen von  $K^*$  einen gemeinsamen Endpunkt, der also kein Schnittpunkt der Sehnen ist. Die Kreissehnen von der Länge Null kann man aus den Folgen der  $2n$  Sehnen ohne weiteres weglassen.

Die Permutation  $P$  im Satz ist durch die Lage der Sehnen von  $K^*$  vollständig charakterisiert. Man kann die Eigenschaften der Permutation  $P$  leicht bestimmen, wenn die Kurve  $C$  keinen oder höchstens einen Doppelpunkt besitzt.

Zerfällt die Kurve durch ein Durchschneiden eines ihrer Doppelpunkte in zwei geschlossene Kurven  $C_1$  und  $C_2$  und ist  $C_2$  eine Jordansche Kurve, so läßt sich der Satz auf die Schnittpunkte der Kurven  $C_1$  und  $C_2$  anwenden.

Die Gültigkeit des Satzes läßt sich auch für den Fall ausdehnen, daß die Kurve  $C$  nicht endlich ist, sondern  $p$  Asymptoten besitzt. Dann sind die unendlichen Punkte von  $C$  als ein  $p$ -facher Punkt von  $C$  zu betrachten. Dies folgt aus der Inversion der außerhalb des Kreises  $K \equiv K^*$  liegenden Bogen der Kurve  $C$ .

GYULA v. SZ. NAGY, Szeged.

## II. Construction graphique de la tangente en un point d'une courbe

PIRANI a indiqué le procédé suivant pour déterminer d'une façon approchée la tangente au point  $P$  d'une courbe (fig. 1):

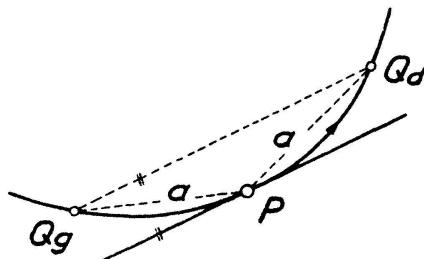


Fig. 1

Avec un rayon  $a$ , ni trop grand ni trop petit, on détermine sur la courbe à partir de  $P$  les deux points  $Q_g$  et  $Q_d$ ; la tangente cherchée en  $P$  est alors à peu près parallèle à la corde  $Q_g Q_d$ .

Si  $P$  n'est pas voisin d'un point où la courbure est minimum ou maximum, ce procédé n'est pas très satisfaisant, et il est évidemment défaillant aux environs des points d'inflexion. A. WALTHER et TH. ZECH<sup>1)</sup> ont évalué l'erreur commise:

$$\delta = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{dx}{ds} + \dots$$

<sup>1)</sup> A. WALTHER et TH. ZECH, *Bemerkungen zur angenäherten Tangentenkonstruktion von Pirani*, Ber. Verh. Sächsischen Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 85, 45 (1933).

$\delta$  est l'angle entre la corde  $Q_g Q_d$  et la tangente en  $P$ ,  $\kappa$  la courbure locale (inverse du rayon de courbure) et  $s$  la longueur de l'arc de la courbe (comptée positivement dans le sens de la flèche). — L'erreur  $\delta$  étant un infiniment petit de l'ordre de  $a^2$ , le procédé de PIRANI est correct du point de vue mathématique, mais l'œil s'aperçoit bien vite qu'il est insuffisant du point de vue graphique, ce qui rend désirable une amélioration de ce procédé.

Mais comme on ne connaît pas en général la variation numérique de la courbure  $\kappa(s)$  d'une courbe qui n'est pas donnée immédiatement par son équation, il faut essayer d'utiliser la courbe elle-même pour trouver une construction plus exacte. Si l'on regarde attentivement la fig. 2, on peut penser à se servir de la différence  $\Delta h$  des deux flèches  $h_g$  et  $h_d$  pour améliorer la direction de la tangente trouvée par PIRANI.

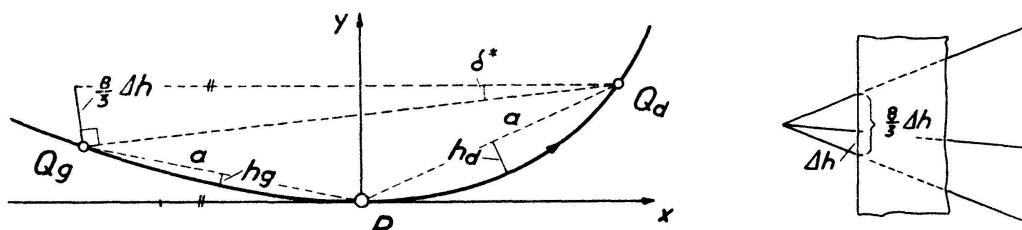


Fig. 2.  $\Delta h = h_d - h_g$ .

Pour développer cette idée par le calcul, on prendra un système de coordonnées  $x, y$  ayant pour origine le point  $P$ , de telle manière que l'axe  $Px$  positif coïncide avec la tangente (orientée) en ce point. — Soit

$$y = b x^2 + c x^3 + \dots, \quad (b, c \text{ quelconques})$$

le développement de MAC LAURIN de la courbe donnée. Pour l'évaluation projetée, il suffit de considérer les deux termes écrits. — Le bon sens aidant, on choisit toujours la corde  $a$  de telle façon que sa longueur ne soit pas trop grande par rapport au rayon minimum de courbure de l'arc  $Q_g Q_d$ . Si le carré de ce rapport est faible devant l'unité, les abscisses de  $Q_g$  et  $Q_d$  sont approximativement  $-a$  et  $+a$ , et leurs ordonnées  $b a^2 - c a^3$  et  $b a^2 + c a^3$ . — Les flèches  $h_g$  et  $h_d$  peuvent alors être calculées assez exactement comme les différences des ordonnées entre la corde et la courbe aux points d'abscisses  $-a/2$  et  $+a/2$ ; avec les approximations antérieures, on obtient:

$$h_g = \frac{1}{2} (b a^2 - c a^3) - \left( b \frac{a^2}{4} - c \frac{a^3}{8} \right)$$

$$\text{et} \quad h_d = \frac{1}{2} (b a^2 + c a^3) - \left( b \frac{a^2}{4} + c \frac{a^3}{8} \right),$$

$$\text{d'où} \quad \Delta h = h_d - h_g = c a^3 - \frac{1}{4} c a^3 = \frac{3}{4} c a^3.$$

L'angle  $\delta^*$  dont il faut faire tourner la corde  $Q_g Q_d$  pour la rendre parallèle à l'axe  $Px$  (tangente à la courbe en  $P$ ), résulte de la différence des ordonnées de  $Q_g$  et de  $Q_d$ :

$$\delta^* = -\frac{1}{2a} [(b a^2 + c a^3) - (b a^2 - c a^3)] = -\frac{2c a^3}{2a}$$

ou, en faisant intervenir  $\Delta h$ ,

$$\delta^* = -\frac{(8/3) \Delta h}{2a}.$$

Pour obtenir la tangente à partir de la corde  $Q_g Q_d$ , il suffit de mesurer le segment  $\Delta h = h_d - h_g$  (bande de papier!), puis de le multiplier par  $8/3$  (à l'œil, ou comme indiqué sur la fig. 2 à droite) et de le porter à peu près perpendiculairement à la base  $Q_g Q_d \cong 2a$  à l'extrémité convenable. — Comme il ressort de la démonstration, cette

construction est aussi valable sans aucune réserve en un point d'infexion; les flèches  $h_g$  et  $h_d$  ont alors des signes différents, et pour avoir  $\Delta h$ , il faut les *ajouter* en valeur absolue.

Pour terminer, on peut encore comparer le  $\delta^*$  avec l'erreur calculée

$$\delta = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{d\kappa}{ds}$$

mentionnée au début. Or, d'après l'équation  $y = b x^2 + c x^3$  on peut maintenant calculer

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \quad \text{par} \quad \kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

au point  $P$ , on obtient simplement  $(d\kappa/ds)_P = 6c$ , ce qui donne

$$\delta = -\frac{a^2}{6} 6c = -\frac{2c a^3}{2a} = \delta^*.$$

On remarque que notre correction  $\delta^*$  est égale à l'erreur commise  $\delta$  de la construction de **PIRANI**.  
—  
ERICH SPONDER, Paris.

### III. Une famille de droites concourantes

1° — Appelons point moyen ou centre d'un certain nombre de points le point dont les coordonnées sont les moyennes arithmétiques des coordonnées respectives des points donnés.

Considérons  $n$  points arbitrairement choisis et leur centre  $O$ ; séparons-les en deux groupes contenant  $p$  et  $q$  points; soit  $p \leq q$ ; soient  $P$  et  $Q$  leurs centres respectifs. Désignons par  $\Sigma_p(x)$  la somme des abscisses du premier groupe, etc.

Les identités

$$\frac{p \frac{1}{p} \Sigma_p(x) + q \frac{1}{q} \Sigma_q(x)}{p+q} = \frac{1}{n} \Sigma_n(x), \quad p \frac{\frac{1}{p} \Sigma_p(y) + q \frac{1}{q} \Sigma_q(y)}{p+q} = \frac{1}{n} \Sigma_n(y), \dots$$

montrent que:

a) le point  $O$  se trouve sur  $PQ$ , b)  $\overline{QO} : \overline{OP} = p : q$ .

2° — Pour une paire fixe des valeurs  $p$  et  $q$ , le nombre  $N(p, q)$  des différentes droites  $PQ$  est égal au nombre des combinaisons de  $n$  points pris respectivement  $p$  à  $p$  ou  $q$  à  $q$ . Donc,

$$N(p, q) = C_n^p = C_n^q = \frac{1}{2} (C_n^p + C_n^q);$$

le nombre total  $\Sigma N(p, q)$  des différentes droites  $PQ$  pour toutes les valeurs possibles des  $p$  et des  $q$  est égal à

$$\Sigma N(p, q) = \frac{1}{2} (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}) = \frac{1}{2} [2^n - (C_n^0 + C_n^n)] = 2^{n-1} - 1.$$

3° — A l'aide de ces simples remarques, on peut trouver dans tout polygone ou polyèdre une famille spéciale de droites concourantes et montrer certaines de leurs propriétés avec une simplicité remarquable. Voici quelques exemples:

Dans un hexagone  $ABCDEF$ , les droites qui joignent:  
les sommets  $A, B, \dots$  avec les centres des pentagones  $BCDEF, CDEFA, \dots$ ,  
les points milieux des côtés  $AB, BC, \dots$  avec les centres des quadrilatères  $CDEF, DEFA, \dots$ ,  
les points milieux des diagonales  $AC, BD, \dots$  avec les centres des quadrilatères  $BDEF, CEFA, \dots$ ,

les points milieux des diagonales  $AD$ ,  $BE$ , avec les centres des quadrilatères  $BCEF$ ,  $CDF$ ,

les centres des triangles  $ABC$ ,  $BCD$ , avec les centres des triangles  $DEF$ ,  $EFA$ ,

les centres des triangles  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $BDE$ , avec les centres des triangles  $BEF$ ,  $BCF$ ,  $ACF$ , ..., passent par le milieu du segment limité par les centres des triangles  $ACE$  et  $BDF$  que forment les sommets pris alternativement. —

On voit par la formule sous 2° que le nombre des droites  $PQ$  augmente très vite avec le nombre des sommets. Ainsi, pour l'icosagone la famille est constituée par 524 287 droites.

Dans le cas le plus simple,  $n = 3$ , la proportion  $b$ ) de 1° nous montre la propriété bien connue des trois médianes d'un triangle.

4° — Considérons un groupe orthocentrique  $A, B, C, H$  et son centre  $E$ . Soient  $G, G', G'', G'''$  les centres de gravité des triangles  $ABC, BCH, CAH, ABH$ ,  $M', M'', M'''$  les milieux de  $BC, CA, AB$  et  $E', E'', E'''$  les milieux de  $AH, BH, CH$ .

On voit que les droites

$$AG', BG'', CG''', HG, \quad (a) \quad (p = 1, q = 3)$$

$$E'M', E''M'', E'''M''' \quad (b) \quad (p = 2, q = 2)$$

passent par  $E$ . Donc, le centre d'un groupe orthocentrique est le centre du cercle des neuf points de ce groupe; en ce cas, les diamètres remarquables de ce cercle (b) et les droites d'EULER (a) constituent la famille de droites. On voit que  $\overline{GE} : \overline{EH} = p : q = 1 : 3$ .

La propriété de convergence des droites telles que (b) pour quatre points quelconques donne une démonstration générale d'un théorème qu'on peut présenter sous des formes différentes selon les cas (quadrilatère, tétraèdre, triangle avec trois céviennes concourantes).

5° — La considération d'un cinquième point  $M$  arbitraire et des centres de gravité  $K', K'', K'''$  des triangles  $MBC, MCA, MAB$  conduit aisément aux résultats suivants:

1. Les droites  $E'K', E''K'', E'''K'''$  et  $ME$  concourent en un point  $O$ .
2.  $\overline{K'O} : \overline{OE'} = \overline{K''O} : \overline{OE''} = \overline{K'''O} : \overline{OE'''} = 2 : 3$ .
3.  $\overline{MO} : \overline{OE} = 1 : 4$ .

D'où le théorème: Les droites qui joignent les points d'EULER de la base d'un tétraèdre avec les centres de gravité des faces opposées concourent sur la droite passant par le centre du cercle des neuf points de cette base et par le sommet opposé du tétraèdre.

G. N. VLAHAVAS, Fareham-Hants.

## Aufgaben

*Lösung der Aufgabe 7* (diese Zeitschrift 1, 21 [1946]). Man setze die molaren Konzentrationen entsprechend der Dissoziationsgleichung  $2 \text{SO}_3 \rightarrow 2 \text{SO}_2 + \text{O}_2$  wie folgt an:  $\text{SO}_3$ :  $c_v = 2 n$  Mole/cm<sup>3</sup> vor der Reaktion. Dann folgen die Konzentrationen nach der Reaktion zu:  $[\text{SO}_3] = 2 n (1 - \alpha)$ ,  $[\text{SO}_2] = 2 n \alpha$ ,  $[\text{O}_2] = n \alpha$ . Totale Molzahl/cm<sup>3</sup>:  $n_t = n (2 + \alpha)$ . Damit ergeben sich die Partialdrücke zu  $p_1 = 2 n (1 - \alpha) RT$ ,  $p_2 = 2 n \alpha RT$ ,  $p_3 = n \alpha RT$  und  $p_t = n (2 + \alpha) RT$ . Hieraus folgt der Bildungsgrad von  $\text{SO}_3$  zu:

$$\chi = \frac{p_1}{p_t} = \frac{2 (1 - \alpha)}{2 + \alpha}$$

und das Massenwirkungsgesetz liefert:

$$K'_p = \frac{p_1^2}{p_2^2 p_3} = \frac{(1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)}{\alpha^3 p_t}.$$

Drückt man  $\alpha$  durch  $\chi$  aus, so folgt:

$$p_t = \frac{27 \chi^2}{4 K'_p (1 - \chi)^3}.$$