

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$d$ . Die Projektion von  $\vec{D}_A$  hat den Wert  $\Theta_d \omega$ , da die Geschwindigkeitsverteilung die einer Rotation um  $d$  ist. Da sich  $d$  translatorisch verlagert, sind ferner Projektionsbildung und Ableitung nach der Zeit vertauschbar, so daß die Projektion von  $d\vec{D}_A/dt$  auf  $d$  durch  $d(\Theta_d \omega)/dt$  gegeben wird. Das Vektorprodukt  $[\vec{v}_A, \vec{J}]$  steht normal zur Bewegungsebene, ist also parallel zu  $d$ . Seine Projektion auf  $d$  verschwindet daher genau dann, wenn es selbst 0 ist. Wenn wir von den trivialen Fällen  $\vec{v}_A \equiv 0$  und  $\vec{J} \equiv 0$  absehen, ist das dann und nur dann der Fall, wenn  $\vec{v}_A$  und  $\vec{J}$  dauernd parallel sind.  $\vec{J} = m \vec{v}_S$  steht wegen der Rotation um  $d$  senkrecht zum Abstand  $r$  des Schwerpunktes von der Momentanachse (Fig. 1). Also muß dies auch für  $\vec{v}_A$  der Fall sein. Dann sind aber die Orthogonalprojektionen von  $\vec{v}_A$  und  $\vec{v}_S$  auf  $r$  beide 0, und dies ist gleichbedeutend damit, daß die Länge von  $r$  sich nicht ändert. Diese Bedingung ist also notwendig und hinreichend dafür, daß die Projektion von  $[\vec{v}_A, \vec{J}]$  auf  $d$  verschwindet. Ist sie erfüllt, so wird wegen des Satzes von STEINER auch  $\Theta_d$  zeitunabhängig, und man erhält aus (10) das Gesetz (3):

$$\frac{d}{dt} (\Theta_d \omega) = \Theta_d \frac{d\omega}{dt} = M_d.$$

W. PROKOP, Winterthur.

## Kleine Mitteilungen

### I. Der Zusammenhang zwischen dem Berührungsproblem von Apollonius und einer Aufgabe der darstellenden Geometrie<sup>1)</sup>

Für das Berührungsproblem von APOLLONIUS, bei dem die Kreise gesucht werden, die drei gegebene Kreise berühren, ist von GERGONNE folgende Lösung angegeben worden:

Sind etwa diejenigen beiden Kreise gesucht, die alle drei gegebenen Kreise  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) von außen bzw. umschließend berühren, so suche man die Pole  $P_i$  der äußeren Ähnlichkeitsachse der  $k_i$ . Verbindet man diese Pole mit dem Potenzzentrum  $P$  der  $k_i$ , so schneiden diese Geraden die  $k_i$  in den sechs Berührungspunkten der beiden gesuchten Kreise.

Einen planimetrischen Beweis findet man etwa in DÖRRIE, *Triumph der Mathematik*.

Es ist nun bemerkenswert, daß man diese Konstruktion zwangsläufig erhält, wenn man die Aufgabe löst, die gemeinsamen Punkte  $S$  von drei Rotationskegeln mit parallelen Achsen und gleichen Öffnungswinkeln mit den Methoden der darstellenden Geometrie zu finden. Setzt man nämlich einen Drehkegel mit demselben Öffnungswinkel so in die andern hinein, daß er sie berührt, so wird seine Spitze in den gemeinsamen Schnittpunkt  $S$  der drei gegebenen Kegel zu liegen kommen, und ein beliebiger ebener Schnitt senkrecht zu den Kegelachsen zeigt, daß mit der Konstruktion dieses Punktes  $S$  die Apolloniussche Kreisaufgabe gelöst ist. Zu diesem Zwecke wird man nun, da sich ähnliche Drehkegel mit parallelen Achsen bekanntlich in ebenen Kurven, Hyperbeln, schneiden, die drei Hyperbelebenen zu schneiden versuchen und dabei feststellen, daß sie eine Schnittgerade gemeinsam haben. Diese ist dann noch mit einem der Kegel zu durchstoßen. Bei der Durchführung der Konstruktion wird man gewahr, daß sie sich

<sup>1)</sup> Dieser Zusammenhang findet sich im Rahmen der Theorie der «Zyklographischen Abbildungen», d. h. einer Zuordnung der orientierten Kreise der Ebene zu den Punkten des Raumes, dargestellt bei E. MÜLLER, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Zyklographie* (Deuticke, Leipzig und Wien 1923), und bei FIEDLER, *Darstellende Geometrie*, Bd. 1 (Teubner, Leipzig 1883). Zur weiteren Orientierung über derartige Abbildungen vgl. etwa KLEIN, *Höhere Geometrie* (Springer, Berlin 1926).

völlig mit der planimetrischen von GERGONNE deckt, und dies soll nun im folgenden näher erläutert werden.

In Fig. 1 sind zwei senkrecht stehende Doppelkegel  $K_1, K_2$  in Grund- und Aufriß dargestellt. Ihre Spitzen sind  $S_1, S_2$ , ihre Grundkreise  $k_1, k_2$ . Die Schnittgerade  $s$  der beiden gemeinsamen Tangentialebenen hat den Spurpunkt  $A_{12}$ , der zugleich äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise  $k_1, k_2$  ist. Die Berührungsmantellinien der Tangentialebenen liegen in zwei parallelen Ebenen  $E_1, E_2$ , deren Spuren  $e_1, e_2$  die Polaren von  $A_{12}$  bezüglich  $k_1, k_2$  sind. Die Potenzlinie  $m_{12}$  der beiden Kreise ist Mittelparallele von  $e_1, e_2$ , denn sie halbiert die Abschnitte der gemeinsamen Tangenten an diese Kreise.

Verschiebt man die Grundrißebene parallel, so ändert sich nichts an der letzten Tatsache, und es ergibt sich, daß alle so erzeugten  $m_{12}$  in der Mittelparallelebene  $M_{12}$  von  $E_1$  und  $E_2$  liegen. Soweit sich die Kegel schneiden, gehen die  $m_{12}$  als Potenzlinien durch die Schnittkurve der Kegel. Diese liegt also in der Ebene  $M_{12}$  und besteht daher in zwei Hyperbelästen.

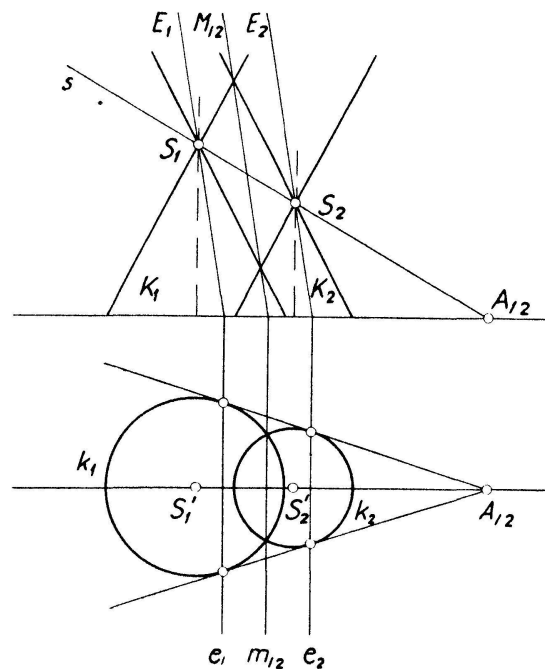


Fig. 1

Liegt die Grundrißebene zwischen den Spitzen  $S_1, S_2$ , so wird  $A_{12}$  zum inneren Ähnlichkeitspunkt.

Dies vorausgeschickt, ist es nun leicht, zu der Konstruktion von GERGONNE zu gelangen.

Über den Kreisen  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denke man sich ähnliche senkrechte Doppelkegel  $K_i$  errichtet. Die Ähnlichkeitsachse  $a$  ist die Spur der Ebene durch die Spitzen  $S_i$ . Jede der drei Ebenen  $M_{ik}$ , in denen die Schnitthyperbeln des  $i$ -ten und  $k$ -ten Kegels liegen, ist parallel zu den beiden Ebenen, die durch die Berührungsmantellinien der Tangentialebenen an den  $i$ -ten und  $k$ -ten Kegel bestimmt werden, also:

$$M_{12} \parallel E_1 \parallel E_2'; \quad M_{23} \parallel E_2 \parallel E_3'; \quad M_{31} \parallel E_3 \parallel E_1'.$$

In Fig. 2, die als Grundrißebene gedacht werden muß, sind die Spuren dieser Ebenen gezeichnet (kleine Buchstaben).

Die Spuren  $e_i$  und  $e_i'$  schneiden sich bzw. in den Polen  $P_i$  der Ähnlichkeitsachse  $a$  bezüglich der  $k_i$ . Verbindet man die  $P_i$  mit den entsprechenden Kegelspitzen  $S_i$ , so sind die drei Geraden  $P_i S_i$ , deren Grundrisse  $P_i S_i'$  senkrecht zu  $a$  sind, als Schnittgeraden paarweise paralleler Ebenen selbst parallel. Ferner ist jede der Ebenen  $M_{ik}$  zu diesen Geraden parallel. Da außerdem ihre Spuren  $m_{ik}$  Potenzlinien sind, so schneiden sich die  $M_{ik}$  in einer Geraden  $g$ , die parallel zu den Geraden  $P_i S_i$  ist.

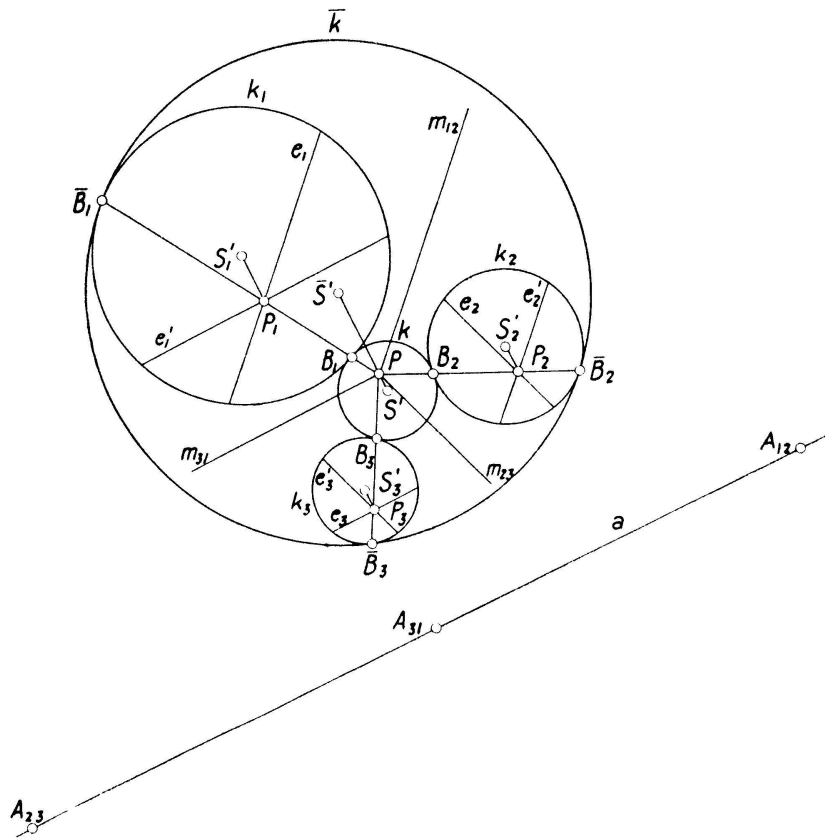


Fig. 2

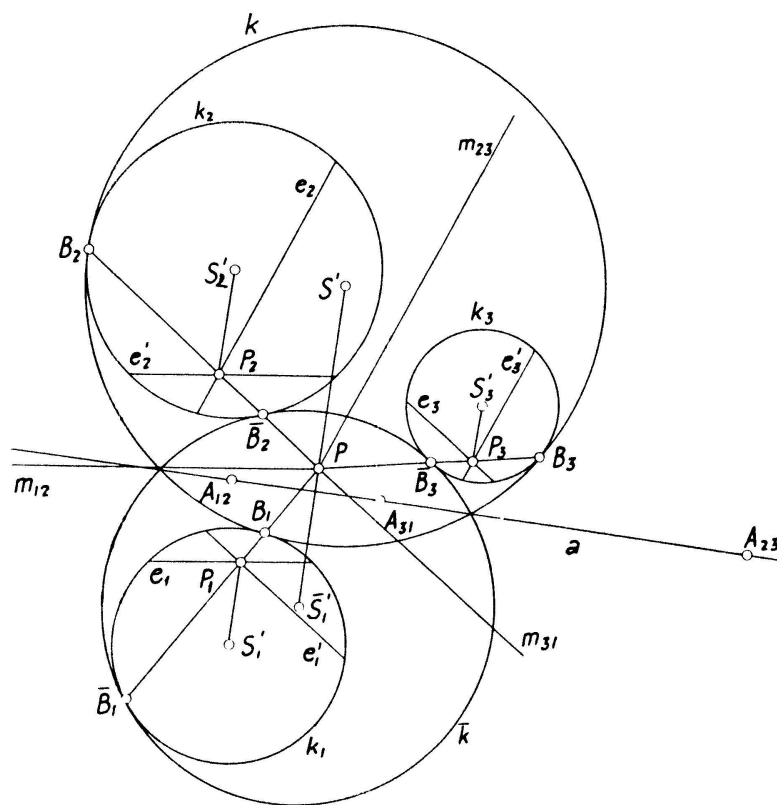


Fig. 3

Diese Gerade  $g$  muß nun aber durch die beiden gemeinsamen Punkte  $S$  (unten)  $\bar{S}$  (oben) der drei Kegelflächen gehen, in denen sich je drei der Hyperbeläste schneiden, denn sie ist ja Schnittgerade der Hyperbelebenen.

Man denke sich jetzt die beiden ähnlichen Kegelflächen  $K$  und  $\bar{K}$ , die die drei Kegelflächen  $K_i$  berühren. Ihre Spitzen müssen in  $S$  und  $\bar{S}$  liegen, ihre Grundkreise  $k$  und  $\bar{k}$  berühren die Kreise  $k_i$  von außen bzw. umschließend.

Legt man endlich noch die drei Ebenen durch  $P_i S_i$ , die sich in der Geraden  $g$  durch  $SP\bar{S}$  schneiden, so müssen diese Ebenen, da sie durch die Spitzen sich berührender Kegel gehen (z. B.  $S$  und  $S_1$ ), die sechs Berührungsmantellinien enthalten. Ihre Spuren  $PP_i$  gehen durch die sechs Berührungspunkte  $B_i, \bar{B}_i$ .

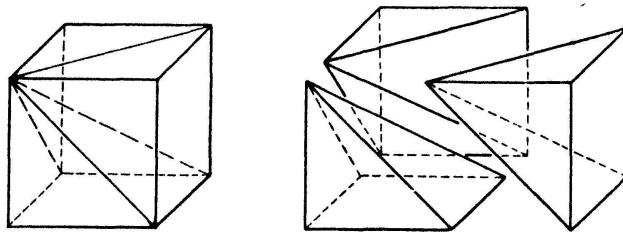
Legt man schließlich die Grundrißebene so, daß etwa die Spitze  $S_1$  oberhalb, die Spitzen  $S_2, S_3$  unterhalb von ihr liegen, so erhält man den zweiten möglichen, von Fig. 2 verschiedenen Fall, daß  $k$  die Kreise  $k_2, k_3$  und  $\bar{k}$  den Kreis  $k_1$  umschließend berührt (Fig. 3 [links oben ist  $S'_1$  durch  $S'_2$  zu ersetzen]). HANS SCHWARZ, St. Gallen.

## II. Über eine Dreiteilung des Würfels und Methodisches zur Volumenberechnung der Pyramide

1. Ein Würfel läßt sich in drei kongruente Pyramiden zerlegen. Diese sind leicht zu erkennen, wenn man von einer Ecke aus die Raumdiagonale und die drei Flächen-diagonalen zieht (siehe Figur). Diese Aufteilungsmöglichkeit bleibt in euklidischen Räumen von beliebiger Dimensionszahl entsprechend erhalten. Es wäre vielleicht interessant, zu vernehmen, ob eine solche Aufteilung schon beschrieben wurde, und wenn ja, von wem.

Denkt man sich statt des Würfels ein Parallelepiped, so geht die kongruente Teilung in eine nur noch dem Inhalt nach gleiche über. Auch diese bleibt in höheren Räumen erhalten.

2. Zur Herleitung der Volumenformel für die Pyramide wird gewöhnlich von einer speziellen, nämlich vom Tetraeder ausgegangen, welches zu einem dreiseitigen Prisma ergänzt wird<sup>1)</sup>.



Bei dieser Methode besteht aber für die Schüler eine nicht zu verkennende Gefahr. Sie werden dazu verleitet, anzunehmen, daß die Zahl 3 im Nenner der Volumenformel ursächlich mit dem Umstand zusammenhänge, daß eben von einer Pyramide mit dreieckiger Basis ausgegangen wird. Aber der Nenner hängt nicht mit der Basis der Ausgangsform zusammen, sondern er ist authentischer Ausdruck der Raumdimension, was bei der Formel für die  $n$ -dimensionale Pyramide sofort klar wird. Diese lautet

$$\text{Volumen einer } n\text{-dimensionalen Pyramide} \\ = \frac{\text{Volumen der } (n-1)\text{-dimensionalen Basis} \times \text{Höhe}}{n}.$$

<sup>1)</sup> Siehe dazu etwa W. BENZ, *Leitfaden der Stereometrie* (Orell Füßli, Zürich und Leipzig 1938).

Da diese Formel in der Mittelschule nicht behandelt werden kann, muß der Anstoß zu falscher Auffassung anders behoben werden. In Anlehnung an die oben beschriebene Teilung des Parallellachs kann dies dadurch geschehen, daß man von einer Pyramide mit einem Parallelogramm als Basis ausgeht. Da die Seitenzahl der neuen Basis und die Zahl 3 des Nenners zueinander prim sind, ist die Konstruktion eines falschen kausalen Zusammenhanges ausgeschlossen.

Der vorgeschlagene Weg ist auch methodisch einheitlicher, indem er die Linie fortsetzt, welche schon in der Planimetrie eingeschlagen wurde, wo zunächst dem Quadrat als Flächeneinheit vor dem Dreieck der Vorzug gegeben wird und dann deswegen gewöhnlich das Rechteck und das Parallelogramm vor dem Dreieck behandelt werden. Später, bei den Volumen, wird analog beim Würfel, und nicht etwa beim Tetraeder begonnen und von da zum Quader und Parallellach, lauter Körpern mit viereckigen Begrenzungen, fortgeschritten.

Etwas anderes ist hingegen die Herleitung der Volumenformel für das Prisma, wo von einer dreieckigen Basis aus der Schluß auf eine  $n$ -eckige ermöglicht wird (direkte Verallgemeinerung). Bei der Pyramide wird zuerst der Satz von der Inhaltsgleichheit zweier Pyramiden mit beliebigen gleichen Basen und gleicher Höhe hergeleitet und dann von einer speziellen auf die allgemeine Pyramide geschlossen (indirekte Verallgemeinerung).

Es ist also zulässig, als spezielle Pyramide eine solche mit einem Parallelogramm als Basis zu wählen, welche zu einem Parallellach ergänzt wird. Dies ist wegen der Erhaltung der Aufteilungsmöglichkeit des Parallellachs in höheren Räumen um so gerechtfertigter. Man hat dann, statt der Ableitungsreihe

Parallellach – dreiseitiges Prisma  $\left\{ \begin{array}{l} \text{allgemeines Prisma} \\ \text{dreiseitige Pyramide – allgemeine Pyramide} \end{array} \right.$   
folgende neue Reihe

Parallellach  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dreiseitiges Prisma – allgemeines Prisma} \\ \text{Pyramide mit Parallelogramm als Basis – allgemeine Pyramide.} \end{array} \right.$

A. MARET, Biel.

### III. *A propos du pentagone*

*Théorème:* Soient  $A, B, C, D, E$  les sommets d'un pentagone régulier et  $M$  un point quelconque de l'arc  $AE$  du cercle circonscrit.

Alors la distance du point  $M$  au sommet le plus éloigné est moyenne géométrique entre la somme des distances du point  $M$  aux sommets les plus rapprochés et aux deux autres sommets.

*Démonstration:* Soit  $x$  le côté du pentagone et  $y$  sa diagonale.

En appliquant le théorème de PTOLÉMÉE aux quadrilatères  $MACE$  et  $MBCD$ , on obtient:

$$\overline{MC} \cdot x = \overline{MA} \cdot y + \overline{ME} \cdot y \quad \text{et} \quad \overline{MC} \cdot y = \overline{MB} \cdot x + \overline{MD} \cdot x.$$

Et après avoir éliminé  $x$  et  $y$ , on a:

$$\boxed{\overline{MC}^2 = (\overline{MA} + \overline{ME})(\overline{MB} + \overline{MD})}.$$

*Corollaires:* 1° –  $M$  coïncide avec  $E$ . Alors  $\overline{ME} = 0$ ;  $\overline{MC} = \overline{MB} = y$ ;  $\overline{MA} = \overline{MD} = x$ , il reste:

$$y^2 = x(y + x) \quad \text{ou} \quad \frac{y}{y+x} = \frac{x}{y}$$

et l'on retrouve une relation connue entre le côté du pentagone et sa diagonale (division en moyenne et extrême raison).

2° —  $M$  est au milieu de  $AE$ . Alors

$\overline{MA} = \overline{ME}$  = le côté du décagone régulier convexe;

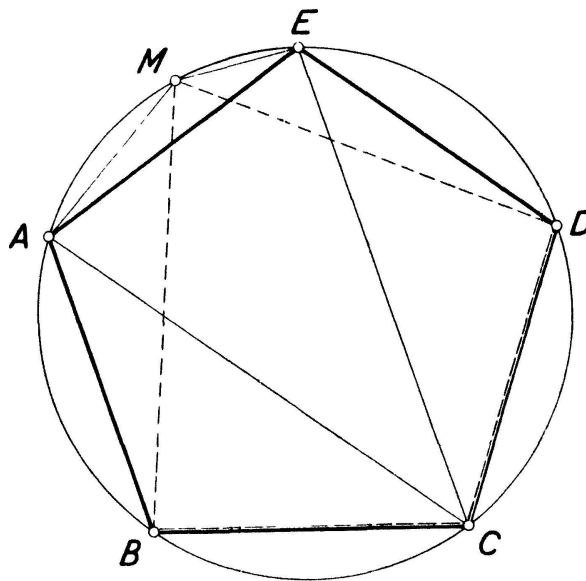
$\overline{MB} = \overline{MD}$  = le côté du décagone régulier étoilé,

$\overline{MC} = 2r$  = le diamètre du cercle circonscrit.

La formule précédente devient:

$$r^2 = c_{10 \text{ convexe}} : c_{10 \text{ étoilé}}$$

Donc, le rayon du cercle circonscrit à un décagone régulier est moyenne géométrique entre les côtés des polygones convexe et régulier.



*Remarque:* La méthode précédente peut être appliquée à d'autres polygones que le pentagone régulier.

G. BILGER, Genève.

## Aufgaben

**Aufgabe 34.** Man bestimme (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) die kleinste Geschwindigkeit (und den entsprechenden Steigungswinkel), mit der eine Kugel geworfen werden muß, damit sie in der Entfernung  $a$  eine senkrechte Mauer von der Höhe  $h$  gerade überfliegt.

E. ROTHMUND.

*Lösung:* Die Abwurfstelle  $A$  sei Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, in dem der Zielpunkt  $Z$  die Koordinaten  $(a, h)$  hat. Bedeuten dann  $t$  die Zeit,  $v$  die Abwurfgeschwindigkeit und  $\varphi$  den Steigungswinkel beim Abwurf, dann gelten die Gleichungen:

$$a = t v \cos \varphi, \quad h = t v \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2.$$

Durch Elimination von  $t$  erhält man hieraus

$$h = a \operatorname{tg} \varphi - \frac{a^2 g}{2 v^2 \cos^2 \varphi}, \quad (*)$$