Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 3

Artikel: Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen
Autor: Kreis, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14321

die mit der darauffolgenden geraden Nummer haben immer entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\operatorname{sign} P_{2r-1} = - \operatorname{sign} P_{2r}$$

Eine Tatsache, die sofort einleuchtet, da diese Permutationen sich nur durch Vertauschung ihrer beiden letzten Elemente unterscheiden.

Ganz allgemein nehmen die Perioden einer beliebigen Ordnung $i!$ nur zwei, und zwar einander entgegengesetzte Zeichenfolgen an; und diese alternieren innerhalb einer nächst höheren Periode regelmäßig. Für die Sechserperiode sind es die Zeichenfolgen $+--++-$ und $-++--+$. In jeder Periode gibt es gleichviel Plus- und Minuszeichen.

Niemals kommen drei gleiche Zeichen hintereinander. In der Regel ist jedem Zeichen das übernächste entgegengesetzt, es herrscht also der viergliedrige Wiederholungstyp $++--$, ausgenommen an den Grenzen der 24erperioden, wo z. B. an den Stellen 23, 24, 25, 26 die Zeichenfolge $-+-+$ erscheint. Diese Abweichung unterbleibt jedoch bei den Vielfachen von 6!, tritt aber wieder auf bei denen von 8! usw., abwechselnd in Ausnahmen und Gegenausnahmen.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen

Die Summe

$$S_p(n) \equiv 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

der Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen für ganzzahlige positive Exponenten p ist bekanntlich durch ein Polynom von n des Grades $p+1$ darstellbar. Abgesehen vom uneigentlichen Fall

$$S_1(n) = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

muß, wie nachher bewiesen wird, dieses Polynom von folgender Gestalt sein:

a) bei einem geraden Exponenten $p = 2q$:

$$S_{2q}(n) = n(n+1)\,(2n+1)\,P_{q-1}\,[(2n+1)^2],$$

b) bei einem ungeraden Exponenten, größer als 1, $p = 2q+3$:

$$S_{2q+3}(n) = n^2\,(n+1)^2\,P_q\,[(2n+1)^2],$$

wo P ein Polynom des Grades $q-1$ bzw. q des Quadrates von $(2n+1)$ bedeutet. Es ist beispielsweise:

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{120}\,[3\,(2n+1)^2 - 7],$$

$$S_6(n) = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{672}\,[3\,(2n+1)^4 - 18\,(2n+1)^2 + 31],$$

$$S_3(n) = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$

$$S_5(n) = \frac{n^2 (n+1)^2}{24} [(2n+1)^2 - 3],$$

$$S_7(n) = \frac{n^2 (n+1)^2}{384} [3(2n+1)^4 - 22(2n+1)^2 + 51].$$

Beweis der Formel a). Wir entwickeln die folgende, für $x = 0$ verschwindende, gerade Funktion

$$F_{2q}(x) \equiv \binom{x}{2q} + \binom{-x}{2q}$$

nach Potenzen von x:

$$F_{2q}(x) = A_{2q} x^{2q} + A_{2q-2} x^{2q-2} + \cdots + A_2 x^2. \tag{1}$$

Wir setzen in Gleichung (1) $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ und summieren. Nun ist:

$$\sum_1^n \binom{x}{2q} = \binom{n+1}{2q+1} \quad \text{und} \quad \sum_1^n \binom{-x}{2q} = -\binom{-n}{2q+1}. \tag{2}$$

Denn aus der Beziehung

$$\binom{x}{p} + \binom{x}{2+q} = \binom{x+1}{q+1}$$

ergeben sich, wenn man $x = 1, 2, \ldots, n$ bzw. $x = -1, -2, \ldots, -n$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen addiert, die Formeln (2). Demnach erhält man aus Gleichung (1)

$$\binom{n+1}{2q+1} - \binom{-n}{2q+1} = A_{2q} S_{2q}(n) + A_{2q-2} S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2 S_2(n). \tag{3}$$

Durch die Substitution $n + 1 = (t+1)/2$, also $t = 2n + 1$, geht die linke Seite von (3) über in

$$\binom{\frac{t+1}{2}}{2q+1} - \binom{\frac{-t+1}{2}}{2q+1} = \text{ungerade Funktion von } t.$$

Da diese Funktion für $t = 0; \pm 1$ verschwindet, kann der Faktor $t(t^2 - 1) = 4(2n+1)(n^2+n)$ vom Polynom abgetrennt werden. Gleichung (3) kann folglich geschrieben werden:

$$n(n+1)(2n+1) F_{q-1}[(2n+1)^2] = A_{2q} S_{2q}(n) + A_{2q-2} S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2 S_2(n).$$

Für $q = 1$ wird also:

$$n(n+1)(2n+1) B_0 = A_2 S_2(n),$$

für $q = 2$:

$$n(n+1)(2n+1)(B_2'(2n+1)^2 + B_0') = A_4' S_4(n) + A_2' S_2(n)$$

usw. Daraus geht hervor, daß die Ausdrücke $S_2(n)$, $S_4(n)$, ... die behauptete Form a) haben müssen.

Beweis der Formel b): Analog bildet man

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} = A_{2q+1} x^{2q+1} + A_{2q-1} x^{2q-1} + \cdots + A_1 x. \tag{4}$$

Der Koeffizient A_1 läßt sich ermitteln, indem Gleichung (4) in der Form geschrieben wird:

$$\frac{x}{2q+1}\binom{x-1}{2q} + \frac{x}{2q+1}\binom{-x-1}{2q} = A_{2q+1} x^{2q+1} + A_{2q-1} x^{2q-1} + \cdots + A_1 x;$$

durch x geteilt und $x = 0$ gesetzt:

$$\frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} + \frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} = A_1,$$

also

$$A_1 = \frac{2}{2q+1}.$$

Gleichung (4) lautet jetzt

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} - \frac{2}{2q+1}\binom{x}{1} = A_{2q+1}\, x^{2q+1} + A_{2q-1}\, x^{2q-1} + \cdots + A_3\, x^3.$$

Wird $x = 1, 2, \ldots, n$ eingesetzt und summiert, so ergibt sich wegen (2):

$$\binom{n+1}{2q+2} + \binom{-n}{2q+2} - \frac{2}{2q+1}\binom{n+1}{2} = A_{2q+1}\, S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\, S_3(n). \tag{5}$$

Die linke Seite von Gleichung (5) ist aber gleich

$$\frac{n\,(n+1)}{(2q+1)\,(2q+2)}\left[\binom{n-1}{2q} + \binom{-n-2}{2q} - 2q - 2\right].$$

Durch die Substitution $n - 1 = (t-3)/2$, also $t = 2n+1$, nimmt der Klammerausdruck folgende Form an:

$$\binom{\frac{t-3}{2}}{2q} + \binom{\frac{-t-3}{2}}{2q} - 2q - 2 = \text{gerade Funktion von } t.$$

Diese gerade Funktion verschwindet aber für $t = \pm 1$, denn

$$\binom{-1}{2q} + \binom{-2}{2q} - 2q - 2 = 1 + 2q + 1 - 2q - 2 = 0.$$

Der Ausdruck ist deshalb durch $t^2 - 1 = 4\,(n^2 + n)$ teilbar, so daß Gleichung (5) wird:

$$n^2\,(n+1)^2 F_{q-1}\,[(2n+1)^2] = A_{2q+1}\, S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\, S_3(n). \tag{6}$$

Indem man in Gleichung (6) nacheinander $2q + 1 = 3, 5, 7, \ldots$ einsetzt, ergibt sich die Richtigkeit der Formel b).

Die Berechnung der Koeffizienten von $S_p(n)$ wird erleichtert, wenn man sich der Identität bedient:

$$S_p(n) - S_p(n-1) \equiv n^p.$$

H. KREIS, Winterthur.

Zum Drallsatz für den starren Körper[1])

1. *Zum Drallsatz bei ebener Bewegung*

Für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Achse gilt bekanntlich der Drallsatz in der Form:

$$\Theta\,\frac{d\omega}{dt} = M, \tag{1}$$

[1]) Dieser Artikel ist ein Auszug aus einem vom Verfasser bearbeiteten Paragraphen des demnächst im Reinhardt-Verlag, Basel, erscheinenden Buches *Grundriß der Physik* von Prof. Dr. P. HUBER und Prof. P. FRAUENFELDER.