Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 3

Artikel: Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen
Autor: Kreis, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14321

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

die mit der darauffolgenden geraden Nummer haben immer entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\operatorname{sign} P_{2r-1} = -\operatorname{sign} P_{2r}$$

Eine Tatsache, die sofort einleuchtet, da diese Permutationen sich nur durch Vertauschung ihrer beiden letzten Elemente unterscheiden.

Ganz allgemein nehmen die Perioden einer beliebigen Ordnung $i!$ nur zwei, und zwar einander entgegengesetzte Zeichenfolgen an; und diese alternieren innerhalb einer nächst höheren Periode regelmäßig. Für die Sechserperiode sind es die Zeichenfolgen $+ - - + + -$ und $- + + - - +$. In jeder Periode gibt es gleichviel Plus- und Minuszeichen.

Niemals kommen drei gleiche Zeichen hintereinander. In der Regel ist jedem Zeichen das übernächste entgegengesetzt, es herrscht also der viergliedrige Wiederholungstyp $+ + - -$, ausgenommen an den Grenzen der 24erperioden, wo z. B. an den Stellen 23, 24, 25, 26 die Zeichenfolge $- + - +$ erscheint. Diese Abweichung unterbleibt jedoch bei den Vielfachen von 6!, tritt aber wieder auf bei denen von 8! usw., abwechselnd in Ausnahmen und Gegenausnahmen.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen

Die Summe

$$S_p(n) \equiv 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

der Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen für ganzzahlige positive Exponenten p ist bekanntlich durch ein Polynom von n des Grades $p + 1$ darstellbar. Abgesehen vom uneigentlichen Fall

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

muß, wie nachher bewiesen wird, dieses Polynom von folgender Gestalt sein:

a) bei einem geraden Exponenten $p = 2q$:

$$S_{2q}(n) = n(n+1)(2n+1)\, P_{q-1}[(2n+1)^2],$$

b) bei einem ungeraden Exponenten, größer als 1, $p = 2q + 3$:

$$S_{2q+3}(n) = n^2 (n+1)^2\, P_q[(2n+1)^2],$$

wo P ein Polynom des Grades $q - 1$ bzw. q des Quadrates von $(2n + 1)$ bedeutet. Es ist beispielsweise:

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{120}[3(2n+1)^2 - 7],$$

$$S_6(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{672}[3(2n+1)^4 - 18(2n+1)^2 + 31],$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$S_5(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{24}\,[(2n+1)^2 - 3],$$

$$S_7(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{384}\,[3\,(2n+1)^4 - 22\,(2n+1)^2 + 51].$$

Beweis der Formel a). Wir entwickeln die folgende, für $x = 0$ verschwindende, gerade Funktion

$$F_{2q}(x) \equiv \binom{x}{2q} + \binom{-x}{2q}$$

nach Potenzen von x:

$$F_{2q}(x) = A_{2q}\,x^{2q} + A_{2q-2}\,x^{2q-2} + \cdots + A_2\,x^2. \tag{1}$$

Wir setzen in Gleichung (1) $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ und summieren. Nun ist:

$$\sum_1^n{}_x \binom{x}{2q} - \binom{n+1}{2q+1} \quad \text{und} \quad \sum_1^n{}_x \binom{-x}{2q} = -\binom{-n}{2q+1}. \tag{2}$$

Denn aus der Beziehung

$$\binom{x}{p} + \binom{x}{2+q} = \binom{x+1}{q+1}$$

ergeben sich, wenn man $x = 1, 2, \ldots, n$ bzw. $x = -1, -2, \ldots, -n$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen addiert, die Formeln (2). Demnach erhält man aus Gleichung (1)

$$\binom{n+1}{2q+1} - \binom{-n}{2q+1} = A_{2q}\,S_{2q}(n) + A_{2q-2}\,S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2\,S_2(n). \tag{3}$$

Durch die Substitution $n + 1 = (t+1)/2$, also $t = 2n + 1$, geht die linke Seite von (3) über in

$$\binom{\frac{t+1}{2}}{2q+1} - \binom{\frac{-t+1}{2}}{2q+1} = \text{ungerade Funktion von } t.$$

Da diese Funktion für $t = 0;\ \pm 1$ verschwindet, kann der Faktor $t\,(t^2 - 1) = 4\,(2n+1)\,(n^2+n)$ vom Polynom abgetrennt werden. Gleichung (3) kann folglich geschrieben werden:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,F_{q-1}\,[(2n+1)^2] = A_{2q}\,S_{2q}(n) + A_{2q-2}\,S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2\,S_2(n).$$

Für $q = 1$ wird also:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,B_0 = A_2\,S_2(n),$$

für $q = 2$:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,(B_2'\,(2n+1)^2 + B_0') = A_4'\,S_4(n) + A_2'\,S_2(n)$$

usw. Daraus geht hervor, daß die Ausdrücke $S_2(n)$, $S_4(n)$, ... die behauptete Form a) haben müssen.

Beweis der Formel b): Analog bildet man

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_1\,x. \tag{4}$$

Der Koeffizient A_1 läßt sich ermitteln, indem Gleichung (4) in der Form geschrieben wird:

$$\frac{x}{2q+1}\binom{x-1}{2q} + \frac{x}{2q+1}\binom{-x-1}{2q} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_1\,x;$$

durch x geteilt und $x = 0$ gesetzt:

$$\frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} + \frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} = A_1,$$

also

$$A_1 = \frac{2}{2q+1}.$$

Gleichung (4) lautet jetzt

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} - \frac{2}{2q+1}\binom{x}{1} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_3\,x^3.$$

Wird $x = 1, 2, \ldots, n$ eingesetzt und summiert, so ergibt sich wegen (2):

$$\binom{n+1}{2q+2} + \binom{-n}{2q+2} - \frac{2}{2q+1}\binom{n+1}{2} = A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\,S_3(n). \tag{5}$$

Die linke Seite von Gleichung (5) ist aber gleich

$$\frac{n(n+1)}{(2q+1)(2q+2)}\left[\binom{n-1}{2q} + \binom{-n-2}{2q} - 2q - 2\right].$$

Durch die Substitution $n - 1 = (t-3)/2$, also $t = 2n + 1$, nimmt der Klammerausdruck folgende Form an:

$$\binom{\frac{t-3}{2}}{2q} + \binom{\frac{-t-3}{2}}{2q} - 2q - 2 = \text{gerade Funktion von } t.$$

Diese gerade Funktion verschwindet aber für $t = \pm 1$, denn

$$\binom{-1}{2q} + \binom{-2}{2q} - 2q - 2 = 1 + 2q + 1 - 2q - 2 = 0.$$

Der Ausdruck ist deshalb durch $t^2 - 1 = 4(n^2 + n)$ teilbar, so daß Gleichung (5) wird:

$$n^2(n+1)^2 F_{q-1}[(2n+1)^2] = A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\,S_3(n). \tag{6}$$

Indem man in Gleichung (6) nacheinander $2q + 1 = 3, 5, 7, \ldots$ einsetzt, ergibt sich die Richtigkeit der Formel *b*).

Die Berechnung der Koeffizienten von $S_p(n)$ wird erleichtert, wenn man sich der Identität bedient:

$$S_p(n) - S_p(n-1) \equiv n^p.$$

H. KREIS, Winterthur.

Zum Drallsatz für den starren Körper[1])

1. *Zum Drallsatz bei ebener Bewegung*

Für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Achse gilt bekanntlich der Drallsatz in der Form:

$$\Theta\,\frac{d\omega}{dt} = M, \tag{1}$$

[1]) Dieser Artikel ist ein Auszug aus einem vom Verfasser bearbeiteten Paragraphen des demnächst im Reinhardt-Verlag, Basel, erscheinenden Buches *Grundriß der Physik* von Prof. Dr. P. HUBER und Prof. P. FRAUENFELDER.