Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 3

Artikel: Geometrischer Ort dritter Ordnung
Autor: Buchner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14319

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band IV Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 15. Mai 1949

Geometrischer Ort dritter Ordnung

Die Frage nach einem geometrischen Ort ist die klassische Aufgabenformulierung in der Geometrie; doch pflegt man dabei selten die Theorie der Kegelschnitte zu überschreiten. Es ist zweckmäßig, auch Aufgaben zu behandeln, die auf leicht konstruierbare Kurven höherer Ordnung führen.

A. – Die folgende Aufgabe ergibt – infolge der symmetrischen Lage der Bestimmungsstücke – einen *zusammengesetzten geometrischen Ort*, eine zerfallende Kurve dritter Ordnung:

Ein Kreis k vom Radius r wird um die Spitze $C(0|0)$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC gezeichnet. Aus den Eckpunkten $A(-1|10)$ und $B(+1|10)$ werden die vier Tangenten an den Kreis k gezeichnet. Gefragt wird nach dem geometrischen Ort der Tangentenschnittpunkte bei veränderlichem Radius r.

Obwohl das Ergebnis geometrisch leicht erkennbar ist, wollen wir die Aufgabe nach den Methoden der analytischen Geometrie lösen.

Aus der Gleichung des Kreises

$$k \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

erhält man die Gleichungen der Potenzlinie der Punkte A und B zu

$$p_a \equiv -x + 10\,y - r^2 = 0 \quad \text{und} \quad p_b \equiv x + 10\,y - r^2 = 0.$$

Beide Punkte haben in bezug auf k dieselbe Potenz $k_a = k_b = 101 - r^2$. Die Gleichung des Tangentenpaares aus A ist danach

$$k\,k_a - p_a^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)\,(101 - r^2) - (x - 10\,y + r^2)^2 = 0 \tag{1}$$

und diejenige des Paares aus B

$$k\,k_b - p_b^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)\,(101 - r^2) - (x + 10\,y - r^2)^2 = 0. \tag{2}$$

Durch Elimination des Parameters r folgt aus (1) und (2) sofort

$$r^2 = \frac{100\,x^2 + y^2 + 20\,x\,y}{x^2 + y^2 + 2\,x - 20\,y + 101} = \frac{100\,x^2 + y^2 - 20\,x\,y}{x^2 + y^2 - 2\,x - 20\,y + 101}$$

oder ausmultipliziert

$$\underline{x\,(10\,x^2 + 10\,y^2 - 101\,y)\,(y - 10) = 0.}$$

Der geometrische Ort setzt sich zusammen aus der *y-Achse*, auf ihr treffen sich die beiden äußern und die beiden innern Tangenten aus A und B, und dem *Umkreis des Dreiecks* ABC, auf dem sich je eine innere und eine äußere Tangente schneiden. Es ist für den Schüler reizvoll, einen geometrischen Ort kennen zu lernen, der sich aus einem Kreis und einer Geraden zusammensetzt.

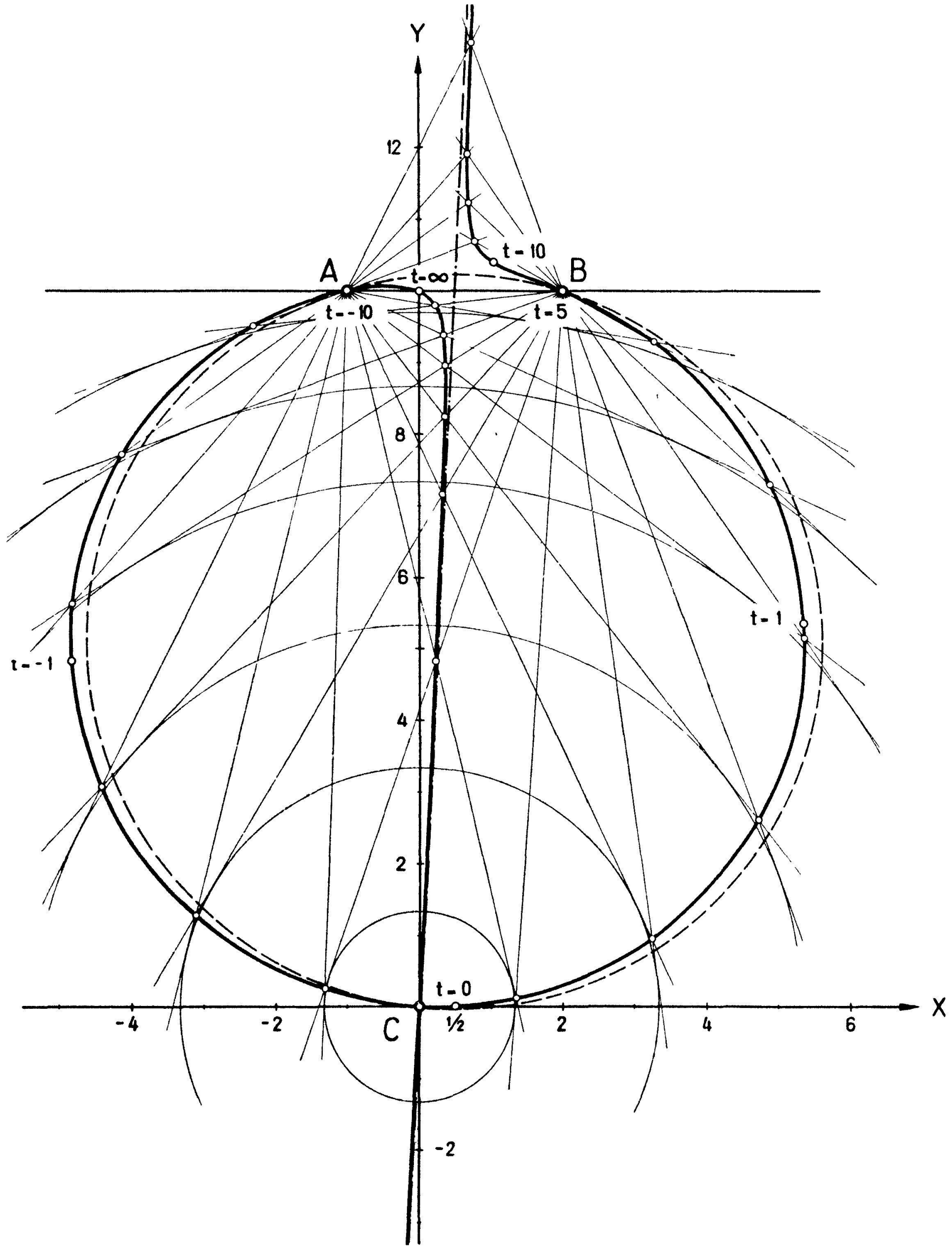

Fig. 1

Die Gerade $y = 10$ hat mit der Aufgabe nichts zu tun; sie ist bestimmt durch die beiden gegebenen Punkte A und B. Man kann aber auch sagen, für $r = 10$ fällt eine Tangente aus A mit einer Tangente aus B zusammen, und jeder Punkt der Geraden $y = 10$ kann als «Schnittpunkt» aufgefaßt werden.

B. – Wir wählen nun als Eckpunkte des Dreiecks die Punkte $A(-1|10)$, $B(2|10)$ und $C(0|0)$, die kein gleichschenkliges Dreieck mehr bilden.

Die auf den Eckpunkt A sich beziehenden Elemente bleiben unverändert, aber die Gleichung der Potenzlinie in bezug auf B heißt jetzt $p_b \equiv 2x + 10y - r^2 = 0$, und dementsprechend wird $k_b \equiv 104 - r^2$. An Stelle von Gleichung (2) tritt

$$k k_b - p_b^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)(104 - r^2) - (2x + 10y - r^2)^2 = 0. \tag{3}$$

r^2 wird aus (1) und (3) eliminiert:

$$r^2 = \frac{100x^2 + y^2 + 20xy}{x^2 + y^2 + 2x - 20y + 101} = \frac{100x^2 + 4y^2 - 40xy}{x^2 + y^2 - 4x - 20y + 104}$$

oder ausmultipliziert

$$(y - 10)(20x^3 - x^2y + 20xy^2 - y^3 - 10x^2 - 204xy + 10y^2) = 0.$$

Wiederum gehört die Gerade $y = 10$ nicht zum geometrischen Ort, der nun aus einer echten *Kurve dritter Ordnung*, einer *Strophoide*, besteht:

$$\underline{C_3 \equiv (x^2 + y^2)(y - 20x) + 10x^2 + 204xy - 10y^2 = 0.} \tag{4}$$

Im Falle B wurde gegenüber A das bestimmende Dreieck nur wenig geändert, daher weicht die C_3 auch nur wenig vom zerfallenden geometrischen Ort, bestehend aus Kreis und y-Achse, ab (Fig. 1).

Der Doppelpunkt $C(0|0)$ bleibt erhalten, während sich der zweite auflöst. Nach wie vor geht die Kurve durch die Punkte A und B. Diese Strophoide ist leicht punktweise konstruierbar, da man rasch an ein System konzentrischer Kreise die Tangenten aus A und B gezeichnet und deren Schnittpunkte bestimmt hat.

Schreibt man die Gleichung (4) in homogener Form

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - 20x_1) + (10x_1^2 + 204x_1x_2 - 10x_2^2)x_3 = 0,$$

so erhält man als Schnitt mit der uneigentlichen Geraden $x_3 = 0$ die uneigentlichen Kreispunkte $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und den Punkt $20x_1 - x_2 = 0$. Die Kurve heißt, der ersteren Eigenschaften wegen, eine zirkulare C_3; sie hat außerdem die Asymptote $y = 20x - (90/401)$. Die Strophoiden sind rationale Kurven, d. h. die homogenen Koordinaten x_k lassen sich als ganze rationale Funktion dritter Ordnung eines Parameters darstellen.

Eine Gerade $y = tx$ durch den Doppelpunkt schneidet die C_3 noch genau in einem Punkte. Aus (4) folgt dann

$$x = \frac{10 + 204t - 10t^2}{(1 + t^2)(20 - t)},$$

daher gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 + 204t - 10t^2, \\ x_2 &= 10t + 204t^2 - 10t^3, \\ x_3 &= 20 - t + 20t^2 - t^3. \end{aligned}$$

Aus $y = tx$ erkennt man, daß der Parameter t gleich der Steigung der Sehne vom Doppelpunkt nach dem Kurvenpunkt ist. Die x-Achse, für die $t = 0$ ist, schneidet die C_3 außer im Doppelpunkt im Punkte $x = 1/2$. Dem reellen uneigentlichen Punkt entspricht der Parameterwert $t = 20$, während die imaginären uneigentlichen Punkte, die Kreispunkte, zu den Werten $t = \pm i$ gehören.

P. BUCHNER, Basel.