Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1949)

Heft: 2

Artikel: Über das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Autor: Matthieu, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14318

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Als Beispiel sei eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 4x - 5 = 0$ interpoliert[1]). Wir setzen $a = 2{,}5$, $b = 2{,}4$, $c = 2{,}45$, mithin $f(a) = -0{,}776$, $f(b) = 0{,}625$, $f(c) = -0{,}093875$, und rechnen mit einer Rechenmaschine, welche für Multiplikator oder Divisor bloß acht Ziffern einzustellen erlaubt (also einem nicht sehr leistungsfähigen Instrument):

$$x = \frac{-1{,}401 \cdot 0{,}093875 \cdot 0{,}05 \cdot 2{,}5 - 0{,}682125 \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}45}{-1{,}401 \cdot 0{,}093875 \cdot 0{,}05 - 0{,}682125 \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}1}$$

$$= \frac{0{,}12089025}{0{,}049208757} = \underline{2{,}45668.}$$

Man verifiziert mit der Rechenmaschine sofort, daß vier Kommastellen genau sind und die fünfte aufgerundet ist. Dieses in einem Schritt sich ergebende Resultat wird bei anderen bekannten Näherungsverfahren erst durch wiederholte Anwendung erreicht. Die hyperbolische Näherung ist natürlich auch fortsetzbar.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die hyperbolische Interpolation nicht nur praktische Vorteile besitzt, sondern auch in didaktischer Hinsicht ein dankbares Problem darstellt, indem sich hier zwangslos Fragen der projektiven Geometrie, analytischen Geometrie, Funktionenlehre und Algebra verbinden lassen.

H. JECKLIN.

Über das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Unter allen Methoden zur näherungsweisen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen nimmt das Iterationsverfahren von PICARD-LINDELÖF[2]) eine besonders wichtige Stellung ein. Es ist außerdem so leicht zu verstehen, daß es in seinen einfacheren Formen auch an Mittelschulen, an denen Differentialgleichungen behandelt werden, ohne weiteres durchgenommen werden kann. Im folgenden sollen deshalb die Grundzüge dieses Verfahrens sowie einige der Praxis des Verfassers entstammende Gesichtspunkte für die Anwendung kurz zusammengestellt werden. Für ein näheres Studium vergleiche man die in den Noten 3 bis 7 genannten Werke.

Das Iterationsverfahren findet in verschiedenen Gestalten Verwendung; vor allem kann es in analytischer und in graphischer Form durchgeführt werden. Die letztere ist ganz besonders elegant und bequem im Gebrauch, jedoch ist sie wie alle graphischen Methoden an die Grenzen der Zeichengenauigkeit gebunden. Immerhin ist es in den meisten Fällen ohne allzu große Mühe möglich, auf graphischem Wege eine Genauig-

---

[1]) Vgl. L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 97.

[2]) Es wird auch als Methode der sukzessiven Approximationen bezeichnet und neben dem hier verfolgten praktischen Zwecke oft auch zum Beweise von Existenztheoremen verwendet.

[3]) KAMKE, *Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Leipzig 1943), S. 4 und Teil A, § 8.

[4]) HORN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Göschens Lehrbücherei, Bd. 10, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig 1937), 2. und 3. Kap.

[5]) BIEBERBACH, *Theorie der Differentialgleichungen*, 3. Aufl. (Berlin 1930), 2. Kap.

[6]) RUNGE und KÖNIG, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924), 10. Kap.

[7]) PICARD, *Traité d'Analyse*, 3. Aufl. (Paris 1925), Bd. II, Kap. 11.

keit etwa bis zu einem Promille zu erreichen, was für die Mehrzahl der praktisch sich stellenden Aufgaben vollauf genügt. Besonders wertvoll sind einige in neuerer Zeit entstandene Weiterbildungen des Verfahrens, unter denen das sog. Extrapolationsverfahren von ADAMS besonders hervorzuheben ist. Dieses letztere gilt heute unbestritten als die wichtigste und praktischste Methode zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Das Verfahren kann auf alle gewöhnlichen Differentialgleichungen angewandt werden, die nur gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen müssen. Es soll aber zunächst für den Fall der Gleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Es sei eine solche Gleichung in der Form

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

gegeben, und es soll diejenige Lösung $y(x)$ gefunden werden, die für das Argument $x = x_0$ den Funktionswert $y = y_0$ annimmt. Die Gleichung (1) kann auch einschließlich der Randbedingungen in Form der Integralgleichung

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \tag{2}$$

geschrieben werden. Den Kern des Iterationsverfahrens bildet dann der folgende Satz:

Die Funktion $f(x, y)$ sei im Rechteck $|x - x_0| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$ (wobei a und b auch unendlich sein können) stetig und genüge dort den Ungleichungen

$$|f(x, y)| \leqq L, \quad \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqq M, \tag{3}$$

wobei L und M positive Konstanten sind. Ferner sei eine im obigen Rechteck verlaufende, stetige und stückweise stetig differenzierbare Ausgangsfunktion $y_1(x)$ gegeben, die nur durch den Anfangspunkt $P(x_0; y_0)$ gehen und der Ungleichung

$$|y_1'(x)| \leqq N \tag{4}$$

genügen soll. Bezeichnet dann ϱ die kleinere der Zahlen a und b/L, so konvergiert die in Analogie zur rechten Seite von (2) gebildete Funktionenfolge

$$\begin{aligned} &y_1(x), \\ &y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1) dx, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx \end{aligned} \tag{5}$$

für $|x - x_0| \leqq \varrho$ stets absolut und gleichmäßig gegen die wirkliche Lösung $y(x)$. Die Konvergenz erfolgt gemäß den Ungleichungen[1])

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqq (L + N)\, M^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \tag{6}$$

[1]) Der Satz kann noch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen bewiesen und auch noch etwas verschärft werden. Man vergleiche dazu die auf S. 34 in den Noten 3 bis 7 genannten Werke. Im folgenden halten wir uns jedoch an die obige Formulierung, die praktisch immer genügt.

Die Reihe (5) konvergiert gemäß (6) ähnlich wie eine Exponentialreihe, also sehr gut. Geometrisch hat die Bildung der Funktionenfolge (5) die folgende Bedeutung: Wenn man in dem zu $f(x, y)$ gehörenden Richtungsfeld (Fig. 1) die Kurve $y_n(x)$ gezogen denkt, so bedeutet der Übergang zu $y_{n+1}(x)$, daß man die auf der Kurve $y_n(x)$ liegenden Linienelemente in vertikaler Richtung so verschiebt, daß sie sich zu einer Kurve zusammenfügen. Es ist nun unmittelbar einleuchtend, daß die so entstehende Kurve $y_{n+1}(x)$ sich bedeutend besser an die wirkliche Lösung $y(x)$ anschmiegt als

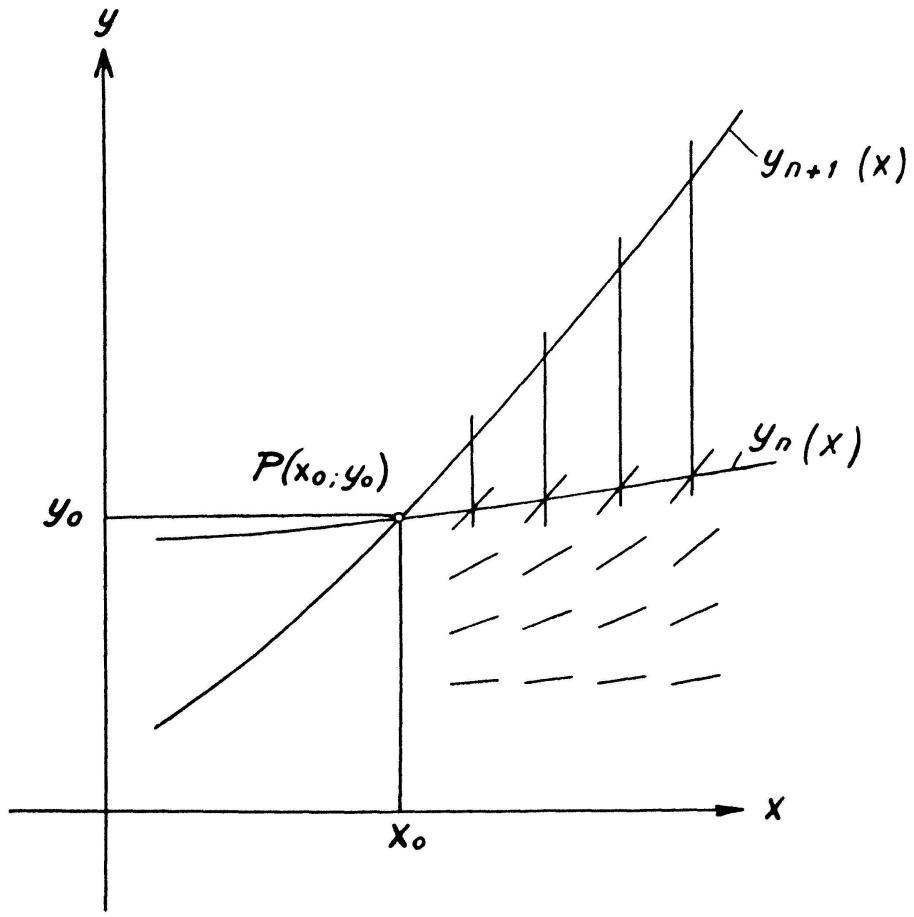

Fig. 1

$y_n(x)$ und daß man mit wachsendem n beliebig nahe an $y(x)$ herankommt. Für die Mittelschulstufe kann wohl diese Plausibilitätsbetrachtung genügen. Sie kann übrigens insofern als völlig streng gelten, als man die Konvergenz der Reihe (5) gar nicht notwendigerweise zu beweisen braucht, indem das Verfahren, wie sich nächstens zeigen wird, von sich aus die Probe dafür liefert, wie genau jede der Näherungsfunktionen (5) die wirkliche Lösung tatsächlich approximiert. Aber auch der strenge Beweis des Satzes ist in keiner Weise schwierig. Er ist vollständig durchgeführt in den auf S. 34 in den Noten 3 bis 7 genannten Werken und soll deshalb hier nicht wiederholt werden. Gemäß (6) findet man weiterhin durch Vergleich mit der Exponentialreihe die leicht durch Ausrechnung zu bestätigende Fehlerabschätzung:

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \leqq (L + N)\, M^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!} \left(e^{M|x - x_0|} - 1\right), \tag{7}$$

welche auch für die numerische Rechnung brauchbar ist.

Praktisch geht man jedoch unter Umgehung der immerhin nicht ganz einfachen Voraussetzungen und Aussagen des ausgesprochenen Satzes fast immer so vor, daß man nach Annahme einer möglichst guten Ausgangsfunktion $y_1(x)$ die Reihe (5) so weit fortsetzt, bis sich die neu entstehenden Funktionen innerhalb der zugelassenen Fehlergrenze nicht mehr ändern. Falls dies wirklich eintritt (was praktisch immer der Fall ist), folgt dann gemäß (2), daß man die gesuchte Funktion $y(x)$ tatsächlich mit der geforderten Genauigkeit gefunden hat. Das Verfahren liefert also bei jedem Schritt von sich aus gleichzeitig eine Probe für die Genauigkeit der errechneten Näherungsfunktion. Dieser Umstand sowie die weitere Tatsache, daß etwaige während der Rechnung unterlaufene Fehler mit der Zeit von selbst wieder korrigiert werden, sind zwei weitere ausschlaggebende Vorteile, die das Iterationsverfahren in der Praxis so beliebt machen.

Diese einfachen Prinzipien können nun in der mannigfachsten Weise weiterverwertet werden. Zunächst soll die analytische Form des Verfahrens an zwei Beispielen erläutert werden:

1. Beispiel: Es soll diejenige Lösung der Gleichung $y' = y$ gefunden werden, die durch den Punkt $P(0; 1)$ geht.

Nimmt man $y_1(x) \equiv 1$ an, so folgt weiterhin

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x dx = 1 + x, \qquad y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

usw. Die Lösung der obigen Gleichung lautet bekanntlich $y = e^x$ und die Funktionen $y_n(x)$ sind also die Teilsummen der Taylorschen Reihenentwicklung der Lösung.

2. Beispiel: Es soll die Lösung der Gleichung $y' = y^2 + x$ gefunden werden, die durch den Ursprung geht[1]).

Die Lösung muß in der Nähe des Ursprungs parabelförmig verlaufen. Setzt man also etwa $y_1(x) = x^2/2$, so ergibt sich gemäß (5) durch leichte Rechnung

$$y_2(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^2}{2}, \qquad y_3(x) = \frac{x^{11}}{4400} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^2}{2}$$

usw. Für $|x| \leqq 1$ unterscheiden sich $y_2(x)$ und $y_3(x)$ bereits um weniger als 1%. Wenn also z. B. die obige Gleichung im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ auf 1% genau integriert werden soll, kann $y_2(x)$ als Lösung bereits genügen.

Die analytische Form dürfte damit klargestellt sein. Bei der Verwendung des Iterationsverfahrens in graphischer Form müssen einfach die bisher analytisch durchgeführten Operationen ins graphische Gebiet umgesetzt werden, wobei praktisch noch viele Hilfsmittel (Rechenschieber und -maschinen, Nomogramme, Tabellen usw.) mit großem Vorteil verwendet werden können. Vor allem ist es wichtig, eine geeignete Methode der graphischen Integration zu kennen. Als solche hat sich das Integrationsverfahren von MASSAU[2]) seiner enormen Einfachheit wegen weitaus am besten bewährt. Der Grundgedanke und die Anwendung des Verfahrens können unmittelbar aus Fig. 2 und dem dritten der durchgerechneten Beispiele ersehen werden. Im übri-

---

[1]) Es ist dies eine Riccatische Gleichung, die sich auf eine Besselsche zurückführen läßt.

[2]) Vgl. das in Note 3, S. 34 genannte Werk, S. 157; ferner HESS, *Praktische Mathematik* (Zürich 1947), § 3, LOCHER, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 411–426, und *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 2, 3. Teil, 1. Hälfte, Abschn. C, Kap. 2, Nr. 12.

gen genügt es wohl, das Iterationsverfahren in graphischer Form an einem Beispiel durchzuführen:

3. Beispiel: Die Gleichung $y' = y^2 + (x/4) - 1$ soll im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gelöst werden für den Fall, daß die Lösungskurve durch den Punkt $P(0; 1)$ geht[1]).

Als Ausgangskurve verwenden wir die in Fig. 2 dargestellte, nach Gutdünken angenommene Kurve $y_1(x)$. Davon ausgehend, muß nun zunächst die Funktion $f(x, y_1) = y_1 + (x/4) - 1$ bestimmt werden (Fig. 2), was vermittels Rechenschieber,

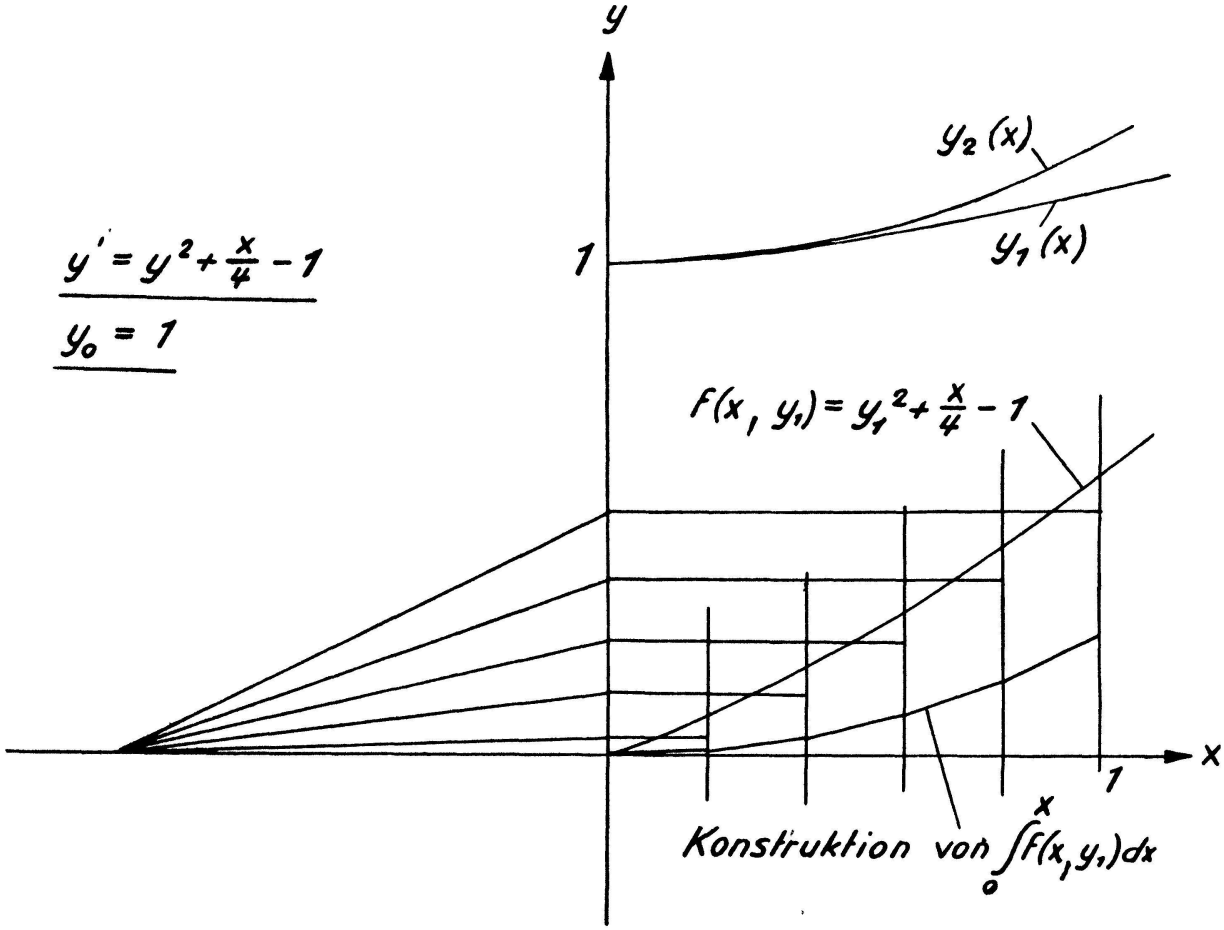

Fig. 2

Quadratzahlentabelle oder einem Nomogramm geschehen kann. Weiterhin handelt es sich darum, diese Kurve zu integrieren. Nach dem Verfahren von MASSAU teilt man das Integrationsintervall in eine Anzahl beliebiger Teilintervalle, ersetzt in jedem dieser letzteren die zu integrierende Funktion nach Augenmaß durch einen geeigneten Mittelwert. Wie durch Versuche bestätigt wurde, kann das mit außerordentlicher Genauigkeit geschehen, da das Auge für solche Flächenabschätzungen sehr empfindlich ist. Die Integration ist nun in einfachster Weise auf die Konstruktion eines Polygonzuges zurückgeführt, den man am besten unter Verwendung eines Pols und der zugehörigen Polstrahlen konstruiert (Fig. 2). Für ein genaueres Studium dieses praktisch außerordentlich wichtigen Verfahrens vergleiche man die in Note 2, S. 37, genannten Werke, wo auch einige weitere Varianten angegeben sind. In Fig. 2 sind fünf

[1]) Es ist dies eine Riccatische Gleichung, die sich auf eine Besselsche zurückführen läßt.

Teilintervalle angenommen, und auf Grund von diesen ist der das Integral $\int_0^x f(x, y)\, dx$ approximierende Polygonzug gezeichnet, der in den Teilpunkten der Intervalle genau mit diesem Integral übereinstimmt. Durch Addition von 1 erhält man daraus für die Teilpunkte die Werte von $y_2(x)$ und kann diese Funktion zeichnen. Die Übereinstimmung mit $y_1(x)$ ist noch nicht gut, und das Verfahren muß also fortgesetzt werden. Etwa von $n = 4$ an unterscheiden sich die Kurven $y_n(x)$ innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht mehr voneinander, so daß man dann also am Ziel ist. Durch geschicktere Wahl von $y_1(x)$ hätte man eine bedeutend raschere Konvergenz erreichen können. Um bereits $y_1(x)$ möglichst geeignet anzunehmen, gibt es spezielle Methoden, die in den auf S. 34 in den Noten 3 bis 7 genannten Werken angegeben sind. Man vergleiche dazu auch das unten zu besprechende Verfahren von ADAMS.

Nach den genau gleichen Prinzipien können auch Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt werden, wobei der letztere Fall im ersteren inbegriffen ist, da sich bekanntlich jede Gleichung höherer Ordnung in einfachster Weise auf ein System von Gleichungen erster Ordnung zurückführen läßt. Sind z. B. die beiden Gleichungen

$$y' = f_1(x, y, z), \qquad z' = f_2(x, y, z) \tag{8}$$

gegeben und sollen diejenigen Lösungen $y(x)$ und $z(x)$ gefunden werden, die für $x = x_0$ die Werte $y = y_0$ und $z = z_0$ annehmen, so kann man wieder zwei Ausgangsfunktionen $y_1(x)$ und $z_1(x)$ annehmen, die nur den Anfangsbedingungen genügen müssen, und ausgehend von diesen die Funktionenfolgen

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx, \qquad z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx \tag{9}$$

bilden. In gleicher Weise kann man nach der obigen Bemerkung auch bei Gleichungen höherer Ordnung (oder Systemen von solchen) vorgehen. Einfacher ist aber im allgemeinen bei diesen letzteren die folgende einfache Modifikation dieser Methode: Wenn z. B. die Lösung der Gleichung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{10}$$

gefunden werden soll, die für $x = x_0$ die Anfangswerte $y = y_0$ und $y' = y_0'$ annimmt, kann man wieder von einer Ausgangsfunktion $y_1(x)$ und ihrer Ableitung $y_1'(x)$ ausgehen, wobei diese Funktionen nur den Anfangsbedingungen genügen müssen und dann die Folge

$$y_n(x) = y_0 + y_0' x + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, y_{n-1}')\, dx^2 \tag{11}$$

bilden. Ähnlich wie dies für die Gleichung (1) durch den oben ausgesprochenen Hauptsatz geschah, läßt sich nun auch durch analoge Sätze für die Folgen (9) und (11) bzw. für die entsprechenden Folgen im allgemeinsten Fall beweisen, daß diese unter gewissen (praktisch immer erfüllten) Stetigkeitsvoraussetzungen stets gegen die wirkliche Lösung konvergieren.

Praktisch ist es jedoch wie früher nicht nötig, diese verhältnismäßig komplizierten Konvergenzbetrachtungen anzustellen, da das Iterationsverfahren auch hier von sich aus bei jedem Schritt die Probe dafür liefert, wie genau die betreffende Näherungsfunktion an die wirkliche Lösung herankommt. Man kann also auch bei Gleichungssystemen und Gleichungen höherer Ordnung rein formal die zugehörigen Funktionenfolgen bilden und dann aus diesen selbst die Konvergenzverhältnisse ersehen. Es bedarf wohl keiner besonderen Erwähnung, daß auch hier die graphische Form des Verfahrens besonders praktisch ist. Es soll nun noch ein Beispiel für die Integration einer Gleichung höherer Ordnung gegeben werden:

4. Beispiel: Die Gleichung $y'' = x\,y$ soll für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ integriert werden[1]).

Wenn man $y_1(x) \equiv 1$ setzt, so ergibt sich gemäß (11):

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \int_0^x x\,dx^2 = 1 + \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \int_0^x x\left(1 + \frac{x^3}{6}\right) dx^2 = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180}$$

usw. Die Funktionen $y_n(x)$ sind wieder die Teilsummen der Reihenentwicklung der Lösung, wie man dies durch Integration vermittels Potenzreihen leicht bestätigt.

Aus den vorstehenden Entwicklungen geht hervor, daß das Iterationsverfahren in der Nähe des Ausgangspunktes stets außerordentlich rasch konvergiert, in größerer Entfernung dagegen etwas weniger gut. Auf dieser Tatsache beruht das sogenannte Extrapolationsverfahren von ADAMS, welches eine einfache Weiterbildung des Iterationsverfahrens ist und ohne Zweifel sowohl analytisch wie graphisch die heute gebräuchlichste Methode zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen darstellt. Der einfache Grundgedanke dieses Verfahrens ist der, daß man eine gegebene Gleichung (oder ein Gleichungssystem), ausgehend vom Anfangspunkt, nach den bisherigen Methoden nicht über die ganze verlangte Intervallänge integriert, sondern nur über ein verhältnismäßig kleines (je nach dem Fall anzunehmendes) Teilstück dieser letzteren. In diesem konvergieren nach der obigen Bemerkung die zu bildenden Funktionenfolgen sehr rasch. Statt mit dem Iterationsverfahren zu operieren, kann man die gegebene Gleichung in diesem ersten Teilstück auch nach einer andern Methode integrieren. Im vierten Beispiel kommt man z.B. für kleine Werte von x sehr rasch vermittels Potenzreihen zum Ziel. Nachdem nun also der Verlauf der Lösung im ersten Teilintervall auf irgendeine Weise möglichst genau bestimmt ist, kann man jetzt durch Extrapolation den Verlauf für ein zweites Teilintervall bestimmen und dann die so extrapolierte Lösung, ausgehend vom Endpunkt des ersten Intervalls, durch Iteration verbessern. In ähnlicher Weise kann man weitere Teilintervalle verwenden bis das Gesamtintervall, in dem die Gleichung gelöst werden soll, erschöpft ist. Das ist der einfache Grundgedanke dieses Verfahrens. Gegenüber dem bisherigen Vorgehen besitzt es zwei wesentliche Vorteile. Erstens wird durch Verwendung kleiner Intervalle, wie bereits bemerkt, die Konvergenz beschleunigt, und zweitens wird die gleiche Wir-

[1]) Es ist dies im wesentlichen eine Besselsche Gleichung.

kung dadurch erzielt, daß auf Grund der Extrapolation bereits die Ausgangskurve in jedem Teilintervall gut gewählt wurde. Das Verfahren konvergiert also äußerst rasch. Meist kommt man mit einer Iteration aus.

Die Extrapolation kann in verschiedener Weise bewerkstelligt werden. Es sei etwa eine Gleichung der Form (1) zu integrieren und es bezeichne $y^*(x)$ eine längs einem oder mehreren Intervallen bereits bekannte, genügend genaue Näherung für die Lösung. Für das erste Intervall wird ja von Anfang an eine solche sehr genau bestimmt. Bei der Durchführung in graphischer Form kann man nun einfach die Kurve $y^*(x)$ nach Gutdünken zeichnerisch ins nächste Intervall fortsetzen, was in den meisten Fällen mit großer Genauigkeit geschehen kann, und dann diese Fortsetzung, ausgehend vom Anfangspunkt des Intervalls, durch Iteration verbessern. Man wird dabei mit sehr wenigen Iterationen, sehr oft mit einer einzigen auskommen. Diese graphische Form ist speziell für technische Zwecke außerordentlich geeignet. Um z.B. die Gleichung des dritten Beispiels nach dem Extrapolationsverfahren zu lösen, kann man das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ etwa in vier Teilintervalle zerlegen und dann für diese auf die angegebene Weise sukzessive die Integralkurve bestimmen.

Zur Durchführung in analytischer Form kann man entweder die gleichen Operationen in analytischer Gestalt durchführen. Eine viel größere Genauigkeit erreicht man aber, wenn man, ausgehend von der Näherung $y^*(x)$, zunächst die Funktion $f(x, y^*)$ für eine Reihe äquidistanter Abszissen berechnet, welch letztere man in geeigneter Weise in den Intervallen annimmt, in denen $y^*(x)$ bekannt ist. Stellt man dann für diese Werte das Interpolationspolynom $P(x)$ nach LAGRANGE, NEWTON, STIRLING oder BESSEL auf, so wird dieses die zur Lösung $y(x)$ gehörende Funktion $f(x, y)$ auch im nächsten Intervall sehr gut approximieren. Außerdem ist es, was für die Iteration wichtig ist, sehr leicht zu integrieren. Bildet man also, falls etwa x_a die Anfangsabszisse des nächsten Intervalls bezeichnet, entsprechend (5) den Ausdruck

$$y^*(x_a) + \int_{x_a}^{x} P(x)\, dx, \tag{12}$$

so stellt dieser im nächsten Intervall die wirkliche Lösung mit außerordentlicher Annäherung dar. In gleicher Weise kann man weiterfahren und die Lösungskurve in weitere Intervalle fortsetzen. Nach dieser Methode wird also unmittelbar nicht $y^*(x)$, sondern $f(x, y^*)$ extrapoliert.

Die systematische Durchführung dieses Gedankens läßt sich weitaus am besten durch die Mittel der Differenzenrechnung bewerkstelligen und führt auf wunderbar einfache Lösungsformeln. Ein näheres Eintreten auf diese ziemlich ausgedehnten Entwicklungen würde jedoch den Rahmen dieses Aufsatzes überschreiten. Sie finden sich schön dargestellt in dem auf S. 34 in Note 3 genannten Werk, wo auch noch verschiedene Ergänzungen und weitere Literaturangaben zum Extrapolationsverfahren zu finden sind.

Das Iterationsverfahren ist ohne weiteres auch auf das komplexe Zahlengebiet übertragbar, jedoch werden die Berechnungen hier sofort viel komplizierter. Ferner ergeben sich in praktischen Fällen noch mancherlei Vereinfachungen, die unter Umständen für die Durchführung einer Rechnung von ausschlaggebendem Wert sein können. Für den wichtigsten Fall der linearen Gleichung zweiter Ordnung sei z.B.

erwähnt, daß sich jede solche Gleichung durch eine einfache Umformung auf eine Riccatische Gleichung der ersten Ordnung zurückführen läßt[1]), welch letztere sich außerordentlich gut zur Anwendung des Iterationsverfahrens eignet.

P. MATTHIEU, Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Zur Prismatoidformel*

In der Stereometrie definiert man das Prismatoid als ein Vielflach, dessen Ecken alle in zwei parallelen Ebenen liegen und dessen Seitenflächen im allgemeinen Dreiecke sind. Das Volumen hängt ab vom Abstand h der Parallelebenen, von der Grundfläche G, der Deckfläche D und der Mittelschnittfläche M:

$$V = \frac{1}{6}\, h\, (G + 4\, M + D).$$

Der Nenner gehört eigentlich zur Klammer; denn die Höhe wird mit einem gewogenen Mittel aus den drei Flächen multipliziert, wobei die sehr formbestimmende Mittelschnittfläche vierfaches Gewicht aufweist. Die Herleitung durch Zerlegen in Pyramiden ist bekannt[2]).

Eigenartig ist nun, daß diese Volumenformel für eine viel allgemeinere Familie von Körpern gilt, nämlich für die *Simpsonschen Körper*[3]); bei diesen ist die Querschnittfläche eine ganze rationale Funktion von höchstens dem 3. Grade in bezug auf den Abstand von der einen Grundfläche; diese kann auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Der Abstand sei x; dann lautet die Behauptung, wenn $Q(x) = \alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2 + \delta\, x^3$:

$$\int_0^h (\alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2 + \delta\, x^3)\, dx = \frac{h}{6}\, (G + 4\, M + D),$$

worin $G = Q(0) = \alpha$, $M = Q(h/2)$, $D = Q(h)$; der Beweis ist leicht zu führen. Er läßt sich aber auch auf einem lehrreichen, kleinen Umweg erlangen. Das Integral ist *additiv*. Es läßt sich daher zerlegen in das Integral über einer Konstanten und die drei Integrale über die Potenzen von x; diese und nur diese lassen sich zusammenfassen, weil ihnen gemeinsam ist, daß für sie die Grundfläche verschwindet. Der Zerlegung des ganzen Integrals entspricht eine Aufspaltung des Simpsonschen Körpers in vier verschiedene Teilkörper. Der einfachste, der zur Konstanten α gehört, stellt ein Prisma oder einen Zylinder dar, wobei nach dem Prinzip von CAVALIERI die Querschnitte erst noch in ihren Ebenen verschoben werden dürfen. Für diesen Körper ist also $D = M = G\ (= \alpha)$; als gewogenes Mittel kommt z. B. G heraus; und es entsteht weiter nichts als die Volumenformel des Prismas.

Die übrigen Teilkörper ruhen auf der Grundebene nur mit einer Ecke (Spitze) oder Linie; sie breiten sich nach oben je nach dem Exponenten linear aus (wie ein Keil) oder pyramidenförmig oder (bei der 3. Potenz) noch stärker als eine Pyramide. Ihre Querschnittfunktion kann geschrieben werden:

$$Q(x) = k\, x^n. \qquad \text{(mit } n = 1,\ 2 \text{ oder } 3)$$

---

[1]) Vgl. das in Note 3, S. 34, genannte Werk, S. 21–24.

[2]) Zum Beispiel W. BENZ, *Stereometrie-Leitfaden* (Orell Füßli, Zürich, 1938).

[3]) L. LOCHER, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 382.