Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 2

Artikel: Hyperbolische Interpolation
Autor: Jecklin, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14317

Möbiussche Tetraeder stets nur dreifach hyperboloidisch liegen, so erkennen wir von neuem, daß die hier behandelten gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder nicht nur einen metrisch, sondern zugleich auch einen projektiv speziellen Fall von Möbiusschen Tetraedern darstellen[1]). ARNULF REUSCHEL, Wien.

Hyperbolische Interpolation

Sind $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ zwei Werte einer reellen Funktion in einem Stetigkeitsintervall, so kann die auf der Proportionengleichung

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

basierende lineare Interpolation

$$y = y_2 - (y_2 - y_1)\,\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

auch gedeutet werden als gewichtete arithmetische Mittelbildung aus y_1 und y_2, wobei die Abszissenabschnitte $(x - x_1)$ und $(x_2 - x)$ als Gewichte dienen, also

$$y = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{(x_2 - x) + (x - x_1)}. \tag{2}$$

Nehmen wir nun zu y_1 und y_2 noch einen dritten bekannten Wert $y_0 = f(x_0)$, so können wir die Mittelbildung verbessern, indem wir die Steigungen $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ und $(y_2 - y_0)/(x_2 - x_0)$ als weitere Gewichte multiplikativ anfügen:

$$y = \frac{y_1(x_2 - x)\,\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} + y_2(x - x_1)\,\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x)\,\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} + (x - x_1)\,\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}},$$

oder

$$y = \frac{y_1(x_2 - x)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + y_2(x - x_1)(x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{(x_2 - x)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + (x - x_1)(x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}. \tag{3}$$

Man ersieht ohne weiteres, daß die zusätzliche Gewichtung ohne Einfluß ist, wenn die zu interpolierende Funktion eine Gerade ist, denn dann ist

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{const.}$$

Wir können die Interpolationsformel (3) auch anders kombinieren. Kehren wir zurück zur linearen Interpolation und bestimmen y einmal durch Interpolation aus y_2 und y_0, d. h. aus dem Verhältnis

$$\frac{y_2 - y_0}{y_2 - y} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x}, \quad \text{woraus} \quad y = y_0 + (y_2 - y_0)\,\frac{x - x_0}{x_2 - x_0},$$

sodann durch Extrapolation aus y_1 und y_0 d. h. aus dem Verhältnis

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0}, \quad \text{woraus} \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

---

[1]) Anmerkung der Redaktion: In dem Buche von W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie* (Wolfenbüttel-Hannover 1947), findet man eine ausführliche Darstellung (S. 138–149) der Möbiusschen Tetraeder.

Ist y zwischen x_0 und x_2 eine nichtlineare monotone Funktion, so ist sicher der eine Interpolationswert zu groß, der andere zu klein, und man kann eine Verbesserung erwarten durch Verbindung der beiden Proportionen zur Doppelverhältnisgleichung

$$\frac{y_2 - y_0}{y_2 - y} \cdot \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x} \cdot \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} . \tag{4}$$

Bei Auflösung nach y resultiert hieraus wieder (3).

Bekanntlich ist ein Doppelverhältnis invariant gegenüber einer (ganzen oder gebrochenen) linearen Substitution. Ist also $y_i = (a\,x_i + b)/(c\,x_i + d)$, so ist (4) erfüllt. In Umkehrung gilt: Wenn eine Kurve $y = f(x)$ die Eigenschaft hat, daß das Doppelverhältnis von vier Abszissenpunkten stets gleich ist dem Doppelverhältnis der vier zugehörigen Ordinatenpunkte, so ist die Gleichung der Kurve von der Gestalt $y = (a\,x + b)/(c\,y + d)$, d. h. wir haben eine gleichseitige Hyperbel mit zu den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems parallelen Asymptoten.

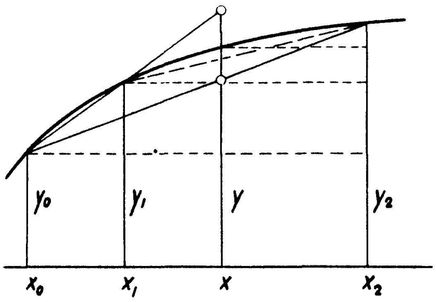

Fig. 1

Eine gleichseitige Hyperbel in dieser Lage ist – wegen der *a priori* bekannten Asymptotenrichtungen – durch drei Punkte bestimmt. Wenn also drei Punkte der Hyperbel bekannt sind, so kann man zu einer beliebigen Abszisse x nach dem Doppelverhältnis (4) die zugehörige Ordinate bestimmen, und in Fortsetzung des Verfahrens beliebig viele weitere Kurvenpunkte. Die besprochene Interpolationsmethode kommt also darauf hinaus, daß durch drei gegebene Werte der zu interpolierenden Funktion in Näherung ein Hyperbelstück genannter Art gelegt wird. In der Tat kann Formel (3) durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach x ganz einfach auf die Gestalt $y = (a\,x + b)/(c\,x + d)$ gebracht werden. Hieraus folgt auch, daß die Interpolationsmethode nur für monotone Funktionsintervalle anwendbar ist. Anderseits ist anzunehmen, daß eine in einem Intervall monotone Funktion auf einem kurzen Abschnitt sich meistens durch ein Kurvenstück einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten näherungsweise ersetzen lassen wird. Die Eignung eines Funktionsintervalls für die Interpolationsmethode lässt sich einfach nachprüfen, indem für vier x-Werte und die zugehörigen y-Werte je das Doppelverhältnis gebildet wird, wobei sich nahe Übereinstimmung ergeben sollte. Es zeigt sich, daß Abweichungen bis zu 20% in den Werten der beiden Doppelverhältnisse immer noch gute Interpolationsresultate gewährleisten. Die Interpolationsmethode eignet sich insbesondere für finanz- und versicherungstechnische Funktionen[1]).

Sind beidseitig der zu interpolierenden Stelle je zwei nahe Werte bekannt, so kann unter Umständen durch einfache Mittelung der Interpolation von links und rechts

[1]) Vgl. H. JECKLIN und H. ZIMMERMANN, *Eine praktische Interpolationsformel*, Mitt. Vereinig. schweiz. Versicherungsmathematiker *48*, 2 (1948).

ein wesentlich verbessertes Resultat erreicht werden. Wir geben ein Beispiel: Von $y = f(x)$ sind bekannt die Werte

x:	3	3,5	4	4,5
$f(x)$:	6	19,375	38	62,625

Zu interpolieren sei $f(x)$ für $x = 3{,}8$. Vorerst prüfen wir die Eignung der Methode. Es ist

$$\frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_3} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}5} = 3,$$

$$\frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_3} = \frac{56{,}625 \cdot 18{,}625}{13{,}375 \cdot 24{,}625} = 3{,}202.$$

Es sind also ordentliche Interpolationsresultate zu erwarten. Interpolation von links:

$$\frac{(4-3)\,(3{,}8-3{,}5)}{(3{,}5-3)\,(4-3{,}8)} = \frac{(38-6)\,(y-19{,}375)}{(19{,}375-6)\,(38-y)}, \quad \text{woraus} \quad y = 29{,}7365.$$

Interpolation von rechts:

$$\frac{(4{,}5-3{,}5)\,(4-3{,}8)}{(4{,}5-4)\,(3{,}8-3{,}5)} = \frac{(62{,}625-19{,}375)\,(38-y)}{(62{,}625-38)\,(y-19{,}375)}, \quad \text{woraus} \quad y = 29{,}9625.$$

Arithmetisches Mittel

$$y = \frac{1}{2}\,(29{,}7365 + 29{,}9625) = 29{,}8495.$$

Der genaue Wert (es handelt sich um die Funktion $y = x^3 - 5\,x - 6$) ist 29,872, der Fehler beträgt demnach $-0{,}75\,^0/_{00}$. Mittels einer Rechenmaschine ist diese Interpolation sehr rasch durchgeführt.

Neben der numerischen Anwendung eignet sich die hyperbolische Interpolation auch zur graphischen Anwendung. Nach dem Satz von PASCAL liegen die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks auf einer Geraden. Seien uns nun im rechtwinkligen Koordinatensystem drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben, die nach ihrer Anordnung auf einer monotonen Kurve liegen können, und es soll für die Abszisse x ein weiterer Punkt hyperbolisch interpoliert werden. Die beiden Schnittpunkte der Hyperbelasymptoten mit der unendlichfernen Geraden seien die Eckpunkte P_4 und P_5 des Sechsecks, und der zu interpolierende Punkt sei P_6 (Fig. 2).

Vorerst zeichnen wir die beiden Sechseckseiten P_1P_2 und P_2P_3. Die Seite P_3P_4 ist offenbar die Parallele zur x-Achse durch P_3. Die Seite P_4P_5 liegt im Unendlichen. Die Seite P_5P_6 muß parallel zur y-Achse verlaufen, ist also die Senkrechte im Abszissenpunkt x. Damit haben wir bereits den Schnittpunkt S_2 der Seiten P_2P_3 und P_5P_6. Die Pascal-Gerade muß durch S_2 gehen und muß ferner parallel zur Seite P_1P_2 sein, da der Schnittpunkt S_3 der letzteren mit P_4P_5 im Unendlichen liegt. Der Schnittpunkt S_1 der Pascal-Geraden mit der Seite P_3P_4 muß auch der Schnittpunkt von P_6P_1 mit P_3P_4 sein. Also schneidet die Gerade P_1S_1 auf der Senkrechten durch S_2 den gesuchten Punkt P_6 aus. (Auf Grund analoger Überlegungen kann man übrigens auch nach Parabeln mit den Achsen x = const. oder y = const. graphisch interpolieren.)

Die hyperbolische Interpolation läßt sich ferner mit einem einfachen Nomogramm vornehmen. Nach einem bekannten Satz der projektiven Geometrie wird das Doppelverhältnis der Schnittpunkte von vier gegebenen Strahlen eines Büschels mit einer Geraden durch Verschiebung dieser Geraden nicht geändert. Nun ist aber ein Doppelverhältnis – wie bereits erwähnt – invariant gegenüber einer linearen gebrochenen Substitution. Wenn wir daher bei zwei verschiedenen Lagen der Geraden die Schnittpunkte der einen Lage mit dem Büschel als Abszissen eines rechtwinkligen Koordinatensystems deuten, so liegen die entsprechenden Schnittpunkte der andern Lage, als zugehörige Ordinaten gedeutet, auf einer gleichseitigen Hyperbel. Als nomographisches Hilfsmittel zeichnet man daher auf Pauspapier eine die Abszissenachse repräsentierende Gerade g_x und ein Strahlenbüschel, indem man äquidistante Punkte von g_x mit einem außerhalb liegenden Punkt verbindet. Auf einer auf anderem Papier (am besten Millimeterpapier) aufgezeichneten Geraden g_y trägt man sodann

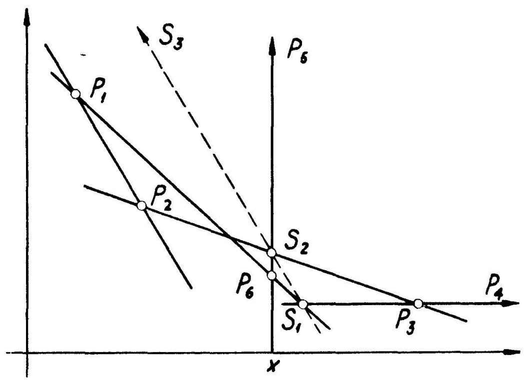

Fig. 2

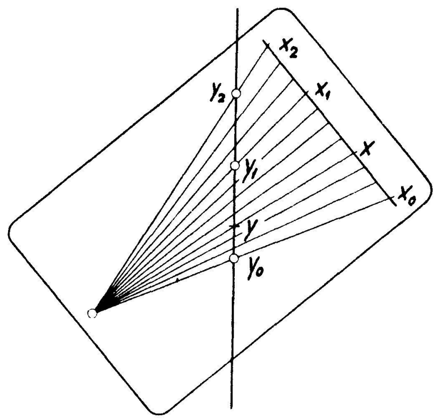

Fig. 3

in einem geeigneten Maßstab die als Basis der Interpolation dienenden Werte y_0, y_1, y_2 auf, legt das durchsichtige Papier mit dem Strahlenbüschel darauf und verschiebt, bis die Punkte y_0, y_1, y_2 von g_y auf die durch die Punkte x_0, x_1, x_2 von g_x gehenden Strahlen zu liegen kommen. Dann ist der zu einer Abszisse x_i gehörende Funktionswert y_i ablesbar als Schnittpunkt des Strahles aus x_i mit der Geraden g_y (Fig. 3).

Die Umkehrung einer linearen gebrochenen Funktion ist wieder eine Funktion dieser Art. Die hyperbolische Interpolation ist also zum Interpolieren von Funktionswerten gleichermaßen anwendbar wie zur Interpolation von Abszissenwerten. Damit ist uns auch ein rasches Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen gegeben. Das Vorgehen ist vorerst analog wie bei Anwendung der *regula falsi*. Sei eine Wurzel von $f(x) = 0$ zu ermitteln, so bestimmt man zuerst in bekannter Weise zwei Werte a und b möglichst kleiner Differenz, derart, daß $f(a) \gtrless 0$, $f(b) \lessgtr 0$. Als dritten Basiswert der Interpolation nimmt man nun am besten $f(c)$, wobei $c = (a+b)/2$ und der vierte für die Interpolation benötigte Funktionswert ist $f(0) = 0$. Die genäherte Wurzel x bestimmt sich nun aus

$$\frac{(a-b)\,(c-x)}{(a-c)\,(x-b)} = \frac{[f(a)-f(b)]\,f(c)}{[f(c)-f(a)]\,f(b)}$$

als

$$x = \frac{[f(a)-f(b)]\,f(c)\,(a-c)\,b + [f(c)-f(a)]\,f(b)\,(a-b)\,c}{[f(a)-f(b)]\,f(c)\,(a-c) + [f(c)-f(a)]\,f(b)\,(a-b)}.$$

Als Beispiel sei eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 4x - 5 = 0$ interpoliert[1]). Wir setzen $a = 2{,}5$, $b = 2{,}4$, $c = 2{,}45$, mithin $f(a) = -0{,}776$, $f(b) = 0{,}625$, $f(c) = -0{,}093875$, und rechnen mit einer Rechenmaschine, welche für Multiplikator oder Divisor bloß acht Ziffern einzustellen erlaubt (also einem nicht sehr leistungsfähigen Instrument):

$$x = \frac{-1{,}401 \cdot 0{,}093875 \cdot 0{,}05 \cdot 2{,}5 - 0{,}682125 \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}45}{-1{,}401 \cdot 0{,}093875 \cdot 0{,}05 - 0{,}682125 \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}1}$$

$$= \frac{0{,}12089025}{0{,}049208757} = \underline{2{,}45668.}$$

Man verifiziert mit der Rechenmaschine sofort, daß vier Kommastellen genau sind und die fünfte aufgerundet ist. Dieses in einem Schritt sich ergebende Resultat wird bei anderen bekannten Näherungsverfahren erst durch wiederholte Anwendung erreicht. Die hyperbolische Näherung ist natürlich auch fortsetzbar.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die hyperbolische Interpolation nicht nur praktische Vorteile besitzt, sondern auch in didaktischer Hinsicht ein dankbares Problem darstellt, indem sich hier zwangslos Fragen der projektiven Geometrie, analytischen Geometrie, Funktionenlehre und Algebra verbinden lassen.

H. JECKLIN.

Über das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Unter allen Methoden zur näherungsweisen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen nimmt das Iterationsverfahren von PICARD-LINDELÖF[2]) eine besonders wichtige Stellung ein. Es ist außerdem so leicht zu verstehen, daß es in seinen einfacheren Formen auch an Mittelschulen, an denen Differentialgleichungen behandelt werden, ohne weiteres durchgenommen werden kann. Im folgenden sollen deshalb die Grundzüge dieses Verfahrens sowie einige der Praxis des Verfassers entstammende Gesichtspunkte für die Anwendung kurz zusammengestellt werden. Für ein näheres Studium vergleiche man die in den Noten 3 bis 7 genannten Werke.

Das Iterationsverfahren findet in verschiedenen Gestalten Verwendung; vor allem kann es in analytischer und in graphischer Form durchgeführt werden. Die letztere ist ganz besonders elegant und bequem im Gebrauch, jedoch ist sie wie alle graphischen Methoden an die Grenzen der Zeichengenauigkeit gebunden. Immerhin ist es in den meisten Fällen ohne allzu große Mühe möglich, auf graphischem Wege eine Genauig-

[1]) Vgl. L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 97.

[2]) Es wird auch als Methode der sukzessiven Approximationen bezeichnet und neben dem hier verfolgten praktischen Zwecke oft auch zum Beweise von Existenztheoremen verwendet.

[3]) KAMKE, *Differentialgleichungen*, 2. Aufl. (Leipzig 1943), S. 4 und Teil A, § 8.

[4]) HORN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Göschens Lehrbücherei, Bd. 10, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig 1937), 2. und 3. Kap.

[5]) BIEBERBACH, *Theorie der Differentialgleichungen*, 3. Aufl. (Berlin 1930), 2. Kap.

[6]) RUNGE und KÖNIG, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924), 10. Kap.

[7]) PICARD, *Traité d'Analyse*, 3. Aufl. (Paris 1925), Bd. II, Kap. 11.