

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

*Aufgabe 23.* Bestimme den Wert des Quotienten

$$q = \frac{x^2 + 2x - 4y + 1}{y^2 + 4y - 6x + 1}$$

im Punkte  $1|1$ , wenn man auf der Kurve mit der Gleichung

$$x^2 y - 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 1 = 0$$

in den Punkt hineingeht.

P. BUCHNER.

*Lösung:* Durch die Transformation  $x = X + 1$ ,  $y = Y + 1$  geht der Punkt  $1|1$  in den Ursprung über und die Kurvengleichung erhält die Form

$$X^2 Y - X^2 + Y^2 = 0.$$

Diese Kurve ist eine rationale  $C_3$  mit dem Knotenpunkt im Ursprung. Der Quotient  $q$  wird durch die Transformation vereinfacht zu

$$q = \frac{X^2 + 4X - 4Y}{X^2 + 6Y - 6X}.$$

Nun läßt sich die  $C_3$  rational durch einen Parameter darstellen. Man setzt  $Y = mX$  und bestimmt die Koordinaten des dritten Schnittpunktes der Geraden mit der  $C_3$ . Dies führt zur Darstellung  $X = (1 - m^2)/m$ ,  $Y = 1 - m^2$ . Durch diese Substitution wird

$$q = \frac{5m + 1}{m(m - 2)(m + 3)}.$$

Für  $X = Y = 0$  ist  $m = \pm 1$  und man erhält  $q(+1) = -3/2$ ,  $q(-1) = -2/3$ .

A. AESCHLIMANN (Burgdorf).

Weitere Lösungen sandten ein: L. DESCLOUX (Fribourg), L. KIEFFER (Luxemburg), K. RIEDER (Riehen).

Die  $C_3$  ist eine Strophoide, der Knoten hat zueinander senkrechte Tangenten.

K. RIEDER untersucht im Anschluß an seine Lösung das Verhalten von  $q$ , wenn man als Bahnkurven Kreise wählt, die im Nullpunkt den den I. Quadranten halbierenden Strahl  $Y = X$  berühren. Nimmt man diesen Strahl als Achse eines Polarkoordinatensystems  $(\varrho, \omega)$ , so ist  $\varrho = 2\lambda \sin \omega$  die Gleichung eines solchen Kreises. Dabei sei der Radius  $\lambda$  positiv bzw. negativ, je nachdem der Mittelpunkt im II. oder IV. Quadranten liegt. Wegen  $X = \varrho \cos [(\pi/4) + \omega]$ ,  $Y = \varrho \sin [(\pi/4) + \omega]$  wird

$$q = \frac{\lambda(1 - \sin 2\omega) - 4\sqrt{2}}{\lambda(1 + \sin 2\omega) + 6\sqrt{2}},$$

somit für  $\omega = 0$  oder  $\pm \pi$

$$\lim q = \frac{\lambda - 4\sqrt{2}}{\lambda + 6\sqrt{2}}.$$

Je nach der Wahl des Kreises kann also  $q$  jeden Wert zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  annehmen. Um z. B. den Grenzwert  $-3/2$  zu erhalten, ist  $\lambda = -2\sqrt{2}$  zu setzen, und das ist der Krümmungsradius im Doppelpunkt der  $C_3$ .

*Aufgabe 19.* Einem Rotationsparaboloid werden zwei Kugeln mit den Radien  $R$  und  $r$  einbeschrieben, die sich berühren. Aus dem die beiden Kugeln verbindenden Stück des Paraboloids sowie den beiden Kugelhauben wird eine Eifläche gebildet.

Beweise für das Volumen und die Oberfläche die Formeln:

$$V = \frac{\pi}{12} (R + r) (17 R^2 - 14 R r + 17 r^2)$$

$$O = \frac{\pi}{3} (13 R^2 - 2 R r + 13 r^2) \quad \left( r \geq \frac{R}{3} \right)$$

E. TROST.

*Lösung:* a) Die Gleichung des Paraboloids sei  $y^2 + z^2 = 2 p x$ . Es seien  $x_1, x_2$  die Abszissen der Berührungspunkte der Kugeln mit der Fläche. Aus  $R + r = x_2 - x_1$  und  $p(p + 2 x_1) = r^2$ ,  $p(p + 2 x_2) = R^2$  (die Parabel hat die konstante Subnormale  $p$ !) folgt  $x_2 - x_1 = (R^2 - r^2)/(2 p)$ , also  $p = (R - r)/2$ . Damit läßt sich das Volumen des Körpers leicht durch  $r, R$  ausdrücken.

b) Die Fläche der Paraboloidzone erhält man wohl am einfachsten, wenn man als Flächenelement den Streifen längs des Berührungskreises einer eingeschriebenen Kugel wählt. Ist  $\varrho$  deren Radius, so wird die Zone gleich  $2 \pi \int \varrho dx$  oder wegen  $\varrho^2 = p(p + 2 x)$

$$\frac{2 \pi}{p} \int \varrho^2 d\varrho = \frac{2 \pi}{3 p} (R^3 - r^3).$$

Zusammen mit den beiden Kugelhauben ergibt das, wenn  $p$  wieder durch  $(R - r)/2$  ersetzt wird, den angegebenen Ausdruck. Aus  $R/r = 1 + (2 p/r)$  folgt, da nach den benützten Formeln  $r$  mindestens gleich dem Scheitelkrümmungsradius  $p$  des Flächenmeridians sein muß, die Bedingung  $R/r \leq 3$ .

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen gingen ein von: L. KIEFFER (Luxemburg), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich).

*Aufgabe 22:* Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ -7x + 24y - 67,2 = 0 \\ 15x - 40z - 72 = 0 \end{cases}$$

ist graphisch aufzulösen.

W. LÜSSY.

Um weitere Zeichnungen des von einer Geraden durchstoßenen dreiachsigen Ellipsoids zu verhindern, geben wir hiermit die *Lösung*. Wählt man folgende Maßstäbe:

$$\begin{aligned} x\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\triangleq 12 \\ y\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\triangleq 7 \\ z\text{-Achse: } 5 \text{ cm} &\triangleq 3, \end{aligned}$$

so handelt es sich um den Schnitt einer Geraden mit einer Kugel, der auf einem Blatt vom Format A4 mit leichter Mühe so bestimmt werden kann, daß die abgelesenen Koordinaten einen Fehler von höchstens 0,01 aufweisen.

*Aufgabe 32:* Avendosi (nello spazio ordinario) quattro sfere  $\Sigma_i$  e quattro punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) si domanda di condurre per ciascuno dei punti  $P_i$  un piano  $\pi_i$  in modo che se  $\Gamma_i$  è la sezione di  $\pi_i$  con  $\Sigma_i$ , i quattro cerchi  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  appartengano ad una stessa sfera.

A. LONGHI.

*Lösung:*  $S_i$  sei der Mittelpunkt von  $\Sigma_i$ . Nun lege man um  $P_i$  diejenige Kugel, welche  $\Sigma_i$  orthogonal schneidet. Dies für alle vier Indizes. Zu den so erhaltenen vier Kugeln konstruiere man das Potenzzentrum  $S$  als Schnitt der Potenzebenen von drei Paaren jener Kugeln. Dann ist  $\pi_i$  die Ebene durch  $P_i$  normal zu  $SS_i$ .

Beweis:  $\mathbf{x}$  bedeute einen dreidimensionalen Vektor vom Koordinatenursprung nach dem Punkt  $X$ , und  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}$  sei das skalare Produkt von  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\eta}$ . Ist nun  $S$  der Mittelpunkt einer Kugel, auf der jene vier Schnittkreise  $\Gamma_i$  liegen, und ist  $r$  ihr Radius, dann lautet die Gleichung dieser Kugel:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{s})^2 = r^2.$$

Ist ferner  $r_i$  der Radius von  $\Sigma_i$ , dann kann die Gleichung von  $\pi_i$  geschrieben werden:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{s})^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{s}_i)^2 = r^2 - r_i^2.$$

Da  $P_i$  auf dieser Ebene liegt, so gilt auch:

$$(\mathbf{s} - \mathbf{x}_i)^2 = r^2 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_i)^2 - r_i^2.$$

Ist  $\mathbf{s}$  variabel, dann ist dies die Gleichung einer Kugel um  $P_i$ , die durch  $S$  geht. Dies für alle vier Indizes. Verkleinert man die Radien dieser vier Kugeln so, daß sich die Quadrate der Radien je um  $r^2$  vermindern, dann ist  $S$  immer noch ihr Potenzzentrum. Und da  $(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_i)^2 - r_i^2$  das Quadrat der Länge der Tangente aus  $P_i$  an  $\Sigma_i$  ist, so schneidet jede der vier verkleinerten Kugeln die zugehörige  $\Sigma_i$  orthogonal.

Daraus ergibt sich die angegebene Konstruktion.

A. STOLL, Zürich.

In einer durch diese Aufgabe angeregten Note<sup>1)</sup> betrachtet J.-P. SYDLER (Zürich) Folgen von Kugeln 1, 2, 3, von denen jede die folgende senkrecht schneidet. Bleiben die Mittelpunkte  $P_1, P_2, P_3$  einer solchen «orthogonalen Kette» fest, während die Radien sich unter Erhaltung der Orthogonalität verändern, so bleibt auch die Potenzebene von 1 und 3 fest, denn sie steht senkrecht zu  $P_1P_3$  und enthält  $P_2$ . Zur Lösung der Aufgabe werden vier orthogonale Ketten mit demselben Anfangsglied konstruiert: 1, 2, 3; 1, 2', 3'; 1, 2'', 3''; 1, 2''', 3'''.  $P_1$  ist offenbar Potenzzentrum von 2, 2', 2'', 2''' und die Potenzebenen von 3 bzw. 3', 3'', 3''' mit 1 gehen durch  $P_2$  bzw.  $P_2', P_2'', P_2'''$ . Also liegen die Schnittkreise dieser Ebenen mit den entsprechenden Kugeln 3, 3', 3'', 3''' alle auf der Kugel 1.

Eine weitere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg).

*Aufgabe 36.* Man bestimme sämtliche Paare von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die nur Primzahlen aus der Reihe 2, 3, 5 enthalten. G. BERGER und E. TROST.

*Lösung:* Wir notieren sogleich die Lösung (1; 2). Da zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen relativ prim sind und eine von ihnen gerade ist, bleiben nur die folgenden zehn Fälle zu betrachten übrig. (Im voraus sei bemerkt, daß  $m, n, p, q, r, s$  natürliche Zahlen bedeuten.)

1.  $\underline{2^n = 3^m + 1}$ . Da  $3^m + 1 \equiv 2$  oder  $4 \pmod{8}$ , je nachdem  $m$  gerade oder ungerade ist, ist  $n \leq 2$ , und man findet nur die Lösung (3; 4).

2.  $\underline{2^n + 1 = 3^m}$ . Für ungerades  $m$  ist  $3^m - 1 \equiv (-1)^m - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ , also  $n = 1$ , so daß man die Lösung (2; 3) erhält. Für  $m = 2p$  ist  $2^n = (3^p + 1)(3^p - 1)$ , also  $3^p + 1$  eine Potenz von 2. Zuzufolge 1. ist dann  $p = 1$ , was die Lösung (8; 9) ergibt.

3.  $\underline{2^n = 5^m + 1}$ . Da  $5^m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ , ist  $n = 1$ . Wegen  $m > 0$  gibt das keine Lösung.

4.  $\underline{5^m = 2^n + 1}$ . Für ungerades  $m$  ist  $5^m - 1 \equiv 4 \pmod{8}$ , also  $n \leq 2$ . Man erhält die Lösung (4; 5). Für  $m = 2p$  ist  $(5^p - 1)(5^p + 1) = 2^n$ , was nach 3. unmöglich ist.

5.  $\underline{3^m 5^p = 2^n + 1}$ . Keine Lösung, weil  $2^n \equiv -1 \pmod{15}$ .

6.  $\underline{2^n = 3^m 5^p + 1}$ . Da  $2^n \equiv 1 \pmod{15}$ , ist  $n = 4q$ , so daß  $3^m 5^p = (2^{2q} + 1)(2^{2q} - 1)$ . Wegen 5. ist  $2^{2q} + 1$  eine Potenz von 3 oder 5 allein. Der erste Fall ist nach 2. ausgeschlossen; aus  $2^{2q} + 1 = 5^r$  folgt nach 4.  $q = 1$  und wir erhalten die Lösung (15; 16).

7.  $\underline{2^m 3^p = 5^n + 1}$ . Da  $5^n \equiv -1 \pmod{12}$ , ist  $n = 1$ , und man erhält die Gleichung  $2 \cdot 3^p = 5^n + 1$ .  $p = 1$  gibt die Lösung (5; 6). Wenn  $p \geq 2$ , so ist  $5^n \equiv -1 \pmod{18}$ , also  $n = 6q + 3$ . Wegen  $5^3 \equiv -1 \pmod{7}$  erhält man  $2 \cdot 3^p = (-1)^{2q+1} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ , was unmöglich ist.

8.  $\underline{5^n = 2^m 3^p + 1}$ . Da  $5^n \equiv 1 \pmod{6}$ , ist  $n = 2q$ , und man erhält die Gleichung  $2^m 3^p = (5^q + 1)(5^q - 1)$ . Nach 3. ist  $5^q + 1$  keine Potenz von 2, da es aber gerade ist, gilt  $5^q + 1 = 2^r 3^s$ . Nach 7. ist  $q = 1$ , was die Lösung (24; 25) ergibt.

<sup>1)</sup> *Quelques considérations sur les sphères*, siehe S. 1.

9.  $3^n = 2^m 5^p + 1$ . Wegen  $3^n \equiv 1 \pmod{10}$  ist  $n = 4q$ , somit  $2^m 5^p = (3^{2q} + 1)(3^{2q} - 1)$ . Beide Faktoren auf der rechten Seite können nicht durch 5 teilbar sein, sonst wäre auch ihre Summe durch 5 teilbar. Einer von ihnen muß also eine Potenz von 2 sein. Nach 1. kann es der erste nicht sein, folglich ist  $3^{2q} - 1 = 2^r$  und wegen 2.  $q = 1$ , so daß man die Lösung (80; 81) erhält.

10.  $2^m 5^p = 3^n + 1$ . Da  $3^n \equiv -1 \pmod{20}$ , ist  $m = 1$ . Für  $p = 1$  hat man die Lösung (9; 10). Wird dagegen  $p \geq 2$  angenommen, so ist  $3^n \equiv -1 \pmod{50}$ , also  $n \equiv 10 \pmod{20}$ , so daß  $2 \cdot 5^p = 3^{10+20r} + 1$ . Wegen  $3^{10} \equiv -1 \pmod{1181}$ , wo 1181 Primzahl ist, hat man  $2 \cdot 5^p = (-1)^{2r+1} + 1 \equiv 0 \pmod{1181}$ , was unmöglich ist.

Es gibt somit genau die zehn Lösungen: (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (8; 9), (9; 10), (15; 16), (24; 25), (80; 81). ANDERS BAGER (Hjörning, Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg) ein.

### Neue Aufgaben

49. Wir betrachten drei Vektoren mit demselben Ausgangspunkt  $O$  und den Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$  beziehungsweise. Es sei  $K$  das Parallelepiped mit Eckpunkt  $O$ , von dem die gegebenen Vektoren die Kanten, und  $H$  das Parallelepiped mit Eckpunkt  $O$ , von dem diese Vektoren die Höhen sind. Man beweise, daß das Produkt der Volumina von  $H$  und  $K$   $(abc)^2$  beträgt, und verallgemeinere diesen Satz mit Beweis auf  $n$  Dimensionen.  
G. PÓLYA (Stanford, USA.).

50. Lieu du centre  $\omega$  d'un cercle tangent à l'ellipse  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  et admettant d'autre part, avec elle, deux tangentes communes parallèles entre elles.

Le point de contact  $M$  d'un tel cercle est le foyer d'une parabole bitangente à l'ellipse, le pôle de contact étant le point  $\omega$ .  
J. HADAMARD (Paris).

51. Ist es möglich, eine Kreisscheibe in zwei zueinander fremde kongruente Punktmengen zu zerlegen?

(Ob man den Randkreis zur Kreisscheibe rechnet oder nicht, ist gleichgültig. Das einfachste ist, den Randkreis dazu zu rechnen.)

B. L. VAN DER WAERDEN (Laren, Holland).

52. Soit  $ABCD$  un quadrilatère quelconque. Une droite variable passant par  $A$  coupe  $BC$  en  $E$  et  $CD$  en  $F$ , et soit  $I$  le point défini par la relation

$$(BCIE) = k. \quad (k = \text{const})$$

1° Le lieu du point commun aux droites  $DE$ ,  $IF$  est une conique ( $\Gamma$ ). 2° La conique ( $\Gamma$ ) passe par  $C$ , étant tangente en  $D$  à  $AD$ ; elle passe encore par  $B$ , la tangente en ce point coupe  $CD$  en un point  $J$  tel que

$$(JDMC) = k,$$

$M$  étant le point d'intersection des droites  $AB$ ,  $CD$ .

3° La polaire du point commun aux droites  $BJ$ ,  $AD$  est la droite  $BD$ .

GH. TH. GHEORGHIU (Timișoara, Rumänien).

53. Ein Parallelogramm mit den Seiten  $a$  und  $b$  und dem spitzen Winkel  $\alpha$  kann auf zwei Arten zur Mantelfläche eines geraden Kreiszyinders zusammengerollt werden, je nachdem  $a$  oder  $b$  zum Umfang des Zylinders gewählt wird. Die entsprechenden Volumina der Zylinder sind

$$V_1 = \frac{F a}{4 \pi} \quad \text{bzw.} \quad V_2 = \frac{F b}{4 \pi}.$$

$F$  ist die Fläche des Parallelogramms. Die Steigungswinkel der Schraubenlinien sind gleich  $\alpha$ .  
A. HESS (Zürich).

54. Aus einem rechteckigen Stück Blech ( $a =$  Grundlinie,  $h =$  Höhe,  $a > h$ ) soll ein längs einer Schraubenlinie geschweißtes Rohr von kreisrundem Querschnitt und

dem Umfang  $u$  ( $h < u < a$ ) hergestellt werden. Man berechne die Höhe  $H$  des Rohres.

Schneidet man von dem Blech an beiden schmalen Seiten rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse  $u$  und einer Kathete  $h$  ab, dann findet man

$$H = \frac{h}{u} (a - \sqrt{u^2 - h^2}).$$

Will man das Blech voll ausnützen, dann schneidet man nur an einem Ende ein Dreieck ab und fügt es am andern Ende wieder an. Dann wird

$$H' = \frac{h a}{u}.$$

Man kann auch das gegebene Blechstück in  $n$  kongruente Rechtecke mit den Seiten  $u$  und  $h$  zerlegen und diese  $n$  Stücke zu einem Rohr zusammenschweißen, allerdings nicht mehr längs einer Schraubenlinie. Dann wird

$$H'' = \frac{h a'}{u}, \quad \text{worin} \quad a' = n u.$$

Es ist  $0 \leq a - a' < u$  und somit  $H'' \leq H'$ . A. HESS (Zürich).

55. Legt man durch die Ecken eines Dreiecks je  $n$  gerade Schnittlinien, so läßt sich leicht die maximale Anzahl der dadurch entstehenden Teile angeben (Aufgabe 39). Man ermittle deren minimale Anzahl. A. STOLL (Zürich).

56. In wie viele Gebiete wird die Ebene durch  $n$  Kreise zerlegt, die die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte haben? C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

## Berichte

VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIKLEHRER

*Société suisse des professeurs de mathématiques*

### 52. Jahresversammlung in Chur, 9./10. Oktober 1948

Im Mittelpunkt der diesjährigen Generalversammlung standen die Vorträge zweier Professoren der Kantonsschule Chur. In seinem Vortrag über *Die Erdbebenwarte Chur* sprach Herr ALFRED KREIS von seinen Erfahrungen beim Bau und Betrieb des Churer Seismographen, insbesondere auch von der Lösung verschiedener technischer Schwierigkeiten, bei denen der Referent initiativ beteiligt war. Sein Ruf als langjähriger und einflußreicher Forscher auf diesem Gebiet war nicht zuletzt ein Grund für den unerwartet starken Besuch unserer Veranstaltungen.

Bei den heute vielerorts aufgestellten Universalseismographen werden die Erschütterungen der Erde durch die Trägheit einer einzigen zirka 20 t schweren Masse registriert, und zwar so, daß jeder Erdstoß vom Seismographen in einen vertikalen, einen nord-südlichen und einen west-östlichen Bewegungsanteil zerlegt und dann komponentenweise aufgezeichnet wird. Die ersten Apparaturen dieser Art wiesen den Mangel auf, wegen der freien Aufhängung der Masse auch in Torsions- und Schaukelbewegungen zu geraten, wodurch natürlich die Seismogramme stark entstellt wurden. Die störenden Schaukelungen können, wie die mathematische Behandlung dieses Problems zeigt, dadurch vermieden werden, daß man den Schwerpunkt der Seismographenmasse mit der Schaukelungsachse zusammenfallen läßt.

Im weitem orientierte der Referent über die durch Temperaturschwankungen bedingten Nullpunktsveränderungen und deren Kompensation, ferner über die Astasierung. Man versteht darunter eine künstliche Vergrößerung der Schwingungszeit der Seismographenmasse mit dem Zweck, Resonanzerscheinungen zu vermeiden. Eine Reihe weiterer Fragen kamen bei der anschließenden Demonstration des in einem Keller der Kantonsschule eingebauten Churer Seismographen zur Sprache.