Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 1

Artikel: Bemerkung zur elementaren Inhaltsleere des Raumes
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14314

Si les points P_2, P_2', P_2'', P_2''' sont dans un plan, les points P_3, P_3', P_3'', P_3''' étant quelconques, à un point P_1 correspond bien un point P_n, mais tous les points P_1 situés sur la même perpendiculaire au plan $P_2, \ldots, P_2'''$ donnent le même point P_n. Il y a correspondance biunivoque entre les points R_1 du plan $P_2, \ldots, P_2'''$ et les points P_n qui parcourent donc une surface. A un axe radical a des sphères 2, $2'$, $2''$, $2'''$ qui passe par R_1 correspondent: un axe radical a' des sphères 3, $3'$, $3''$ et un axe radical a'' des sphères $3'$, $3''$, $3'''$. a' et a'' ne dépendent que du point R_1 et se coupent toujours au centre radical de 3, $3'$, $3''$, $3'''$. Le lieu du point P_n est donc le lieu des points d'intersection de deux gerbes perspectives (à un rayon à l'infini correspondant un rayon à l'infini) et le lieu de P_n est un plan π.

A tout point P_1^* de π correspond un point P_n de π et inversement. La correspondance $P_1^* P_n$ est une affinité qui n'a qu'un point double dans le fini, $P_1^* = P_n$; c'est aussi le seul point double $P_1 = P_n$.

Si les points $P_2, \ldots, P_2'''$ sont sur une droite, à tous les points P_1 situés dans un plan perpendiculaire à cette droite correspond le même point P_n dont le lieu est une droite sur laquelle il n'y a qu'un point de coïncidence $P_1 = P_n$ dans le fini.

Si les points $P_2, \ldots, P_2'''$ sont dans un plan et les points $P_3, \ldots, P_3'''$ dans un autre plan, à un axe radical a des sphères 2, $2'$, $2''$, $2'''$ correspondent un et un seul axe radical à des sphères 3, $3'$, $3''$ et un et un seul axe radical a'' des sphères $3'$, $3''$, $3'''$; la correspondance $a'a''$, biunivoque, affine, a un seul élément double qui coupe son correspondant a au seul point double $P_1 = P_n$. Nos théorèmes sont donc également valables dans ces cas particuliers.

J.-P. SYDLER, Zurich.

Bemerkung zur elementaren Inhaltslehre des Raumes

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich die Volumformel für ein allgemein gestaltetes Tetraeder leider nicht ohne Grenzprozesse herleiten läßt; die elementare Inhaltslehre des Raumes, das heißt die Lehre der Polyederinhalte, ist im Gegensatz zu derjenigen der Ebene, der Lehre der Polygoninhalte, nicht in endlich geschlossener Form entwickelbar. Dies liegt, wie allgemein bekannt ist, an einem bereits von K. F. GAUSS[1]), später erneut von D. HILBERT[2]) vermuteten Sachverhalt, der erst von M. DEHN[3]) vollständig und exakt als zutreffend nachgewiesen wurde, wonach Tetraeder gleicher Grundfläche und gleicher Höhe existieren, welche nicht «endlich-zerlegungsgleich» sind. Zwei Polyeder heißen «endlich-zerlegungsgleich», wenn sich das eine so in endlich viele Teilpolyeder zerlegen (zerschneiden!) läßt, daß man das andere aus eben diesen Teilpolyedern wieder zusammensetzen kann. – Soll der Nachweis der Volumgleichheit zweier derartiger Tetraeder dadurch geführt werden, daß die beiden Körper in paarweise kongruente Teiltetraeder zerlegt werden, so muß schon eine Zerlegung in abzählbar-unendlich viele Teile ins Auge gefaßt werden.

In der Tat beruht die berühmte Beweisführung des EUKLID[4]) für die Volumgleichheit zweier Pyramiden gleicher Grundfläche und gleicher Höhe letzten Endes auf der

[1]) Werke *8*, 241, 244.
[2]) Math. Probleme, Gött. Nachr. 1900, 266.
[3]) Math. Ann. *55*, 465–478 (1901).
[4]) Nach Artikel ZACHARIAS, Encyklopädie III AB. 9, 940–942.

Verifikation der Verwandtschaft, die wir im Rahmen der neueren Begriffsbildungen als «abzählbar-unendlich-zerlegungsgleich» zu bezeichnen haben.

Natürlich kann man, wie dies beispielsweise S. O. SCHATUNOVSKI[1]) getan hat, den dritten Teil des Produktes von Grundfläche und Höhe als eine dem Tetraeder zugeordnete Inhaltsmaßzahl postulieren. Diese Zahl erweist sich nämlich als von der Wahl der Grundfläche unabhängig. Indem man einem beliebigen Polyeder als Inhaltsmaßzahl die Summe der Inhaltsmaßzahlen der Tetraeder, aus welchen sich das Polyeder tetrangulieren läßt, zuordnet und nachweist, daß diese Summe von der speziellen Wahl der Tetrangulierung unabhängig ist[2]), gelangt man zu einer elementaren Inhaltslehre für die Polyeder[3]).

Mit Recht wirft man diesem Vorgehen eine gewisse Willkür vor; es ist nämlich zunächst unklar, ob nicht auf analoge Weise auch wesentlich andere elementare Inhaltssysteme hergestellt werden können und ob die Inhaltsmaßzahl der Schatunovskischen Konstruktion für «alle» Polyeder mit dem Inhalt der klassischen Lehre EUKLIDS übereinstimmt.

Die angedeutete Lücke wird offenbar dadurch ausgefüllt, daß man zeigt, wie sich der erwähnte Ansatz für das Tetraedervolumen in eindeutiger und notwendiger Weise aus den fundamentalen Eigenschaften des Inhalts herleiten läßt. In der Tat ist dies möglich, und es ist das Ziel der vorliegenden Note, diesen Nachweis zu führen. Genauer: Unter einem elementaren Inhaltssystem wollen wir den Körper der räumlichen Polyedermengen P verstehen, über welchem ein für alle P eindeutig erklärtes reelles Funktional $J(P)$, genannt «Inhalt», definiert ist, so daß die vier nachgenannten Postulate der allgemeinen Inhaltstheorie erfüllt sind, nämlich

I. $J(P) \geqq 0$;

II. $J(P+Q) = J(P) + J(Q)$, falls P und Q keine inneren Punkte gemeinsam haben;

III. $J(P) = J(Q)$, falls P und Q kongruent sind;

IV. $J(E) = 1$, wo E den Einheitswürfel bezeichnet.

Mit ausschließlicher Verwendung dieser vier Eigenschaften des Inhalts $J(P)$ werden wir nachweisen, daß für ein Tetraeder T mit der Grundfläche F und der Höhe h die Volumformel

$$J(T) = \frac{F\,h}{3} \tag{1}$$

gilt. Damit ist gezeigt, daß das bekannte klassische elementare Inhaltssystem im Rahmen der durch die Postulate I. bis IV. geregelten Inhaltssysteme das einzig mögliche ist. Damit dürften die gegen die elementare Inhaltstheorie SCHATUNOVSKIS erhobenen Einsprüche[4]) gegenstandslos geworden sein. Nachdem nämlich weiter be-

---

[1]) Math. Ann. *57*, 496–508 (1903).

[2]) Die Beweisführung für diese Invarianz ist der eigentliche wichtige Inhalt der Schatunovskischen Abhandlung.

[3]) Nach W. SÜSS (Begründung der Lehre vom Polyederinhalt, Math. Ann. *82*, 297–305 [1920]) läßt sich die Inhaltsgleichheit zweier Polyeder in äquivalenter Weise auch als Zerlegbarkeit in endlich viele Tetraeder mit paarweise gleichem Inhaltsmaß definieren.

Nach einem Satz des Genannten sind zwei Polyeder dann und nur dann inhaltsgleich, wenn sie cavalierisch ergänzungsgleich sind.

Bei der Definition dieser speziellen Ergänzungsgleichheit sind nur Tetraeder zugelassen, welche cavalierisch gleich sind, d. h. im Inhaltsmaß eines Grunddreiecks und der zugehörenden Höhe übereinstimmen.

[4]) ZACHARIAS Encyklopädie III AB. 9, 94.

wiesen wird, daß sich, ausgehend von (1), ein Inhaltssystem erzeugen läßt (vgl. Erörterungen weiter oben), welches die Postulate I. bis IV. befriedigt, muß der erzeugte Inhalt eines beliebigen Polyeders des betrachteten Mengenkörpers notwendig mit dem klassischen Inhalt im Sinne der Lehre EUKLIDS zusammenfallen, da es ja, wie bewiesen, nur ein einziges System geben kann.

Beweisgang: Zunächst folgert man aus I. bis IV., daß für einen Würfel W der Kantenlänge a die Volumformel

$$J(W) = a^3 \tag{2}$$

richtig ist. Aus II. bis IV. folgt dies zunächst für Würfel mit rationaler Kantenlänge a,

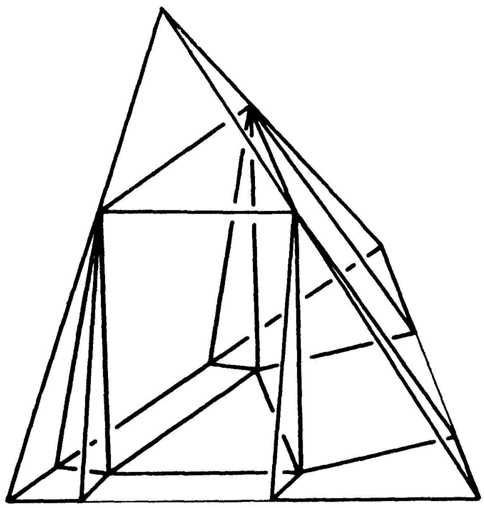

Fig. 1

sodann im Hinblick auf die sich für zwei beliebige Polyeder P und Q aus I. und II. ergebende Monotonierelation

$$J(P) \geqq J(Q), \quad \text{falls} \quad P \supset Q, \tag{3}$$

für Würfel beliebiger Kantenlänge a. Nach II. und III. haben endlich-zerlegungsgleiche Polyeder denselben Inhalt. Da man nun weiß, daß jedes gerade Prisma G der Grundfläche F und der Höhe h mit einem Würfel der Kantenlänge $a = \sqrt[3]{F\,h}$ endlich-zerlegungsgleich ist[1]), schließt man auf die Gültigkeit der Volumformel

$$J(G) = F\,h \tag{4}$$

für ein gerades Prisma G. — Es sei nun ein Tetraeder T mit der Grundfläche F und der Höhe h gegeben (vgl. Fig. 1). Es sei $z > 0$ und es bedeute $z\,T$ das zu T ähnliche Tetraeder mit der linearen Vergrößerung z. Setzen wir nun

$$J(z\,T) = f(z), \tag{5}$$

so ist $f(z)$ wegen I. eine nichtnegative, wegen (3) eine in jedem endlichen Intervall beschränkte Funktion von z. Weiter sei $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ und $x + y = z$. Nun führen wir die nachfolgend beschriebene Zerlegung (vgl. Fig. 1) durch: Vom Tetraeder $z\,T$ wird durch einen Parallelschnitt zur Grundfläche das Tetraeder $x\,T$ oben abgeschnitten. Vom bleibenden Pyramidenstumpf wird das gerade Prisma G, dessen

---

[1]) Vgl. beispielsweise A. EMCH, Comm. Math. Helv. *18* (1945/46).

obere Deckfläche durch die obere Schnittfläche des Stumpfes gegeben ist, ausgeschnitten. Vom verbleibenden Mantelpolyeder können nun drei gerade Prismen D_1, D_2, D_3, welche an den Mantelseitenflächen des Prismas G senkrecht aufgesetzt sind, ausgeschnitten werden. Jetzt bleiben drei Eckenpyramiden P_1, P_2, P_3 übrig, welche zum Tetraeder $y\,T$ zusammengefügt werden können. Eine elementare Rechnung lehrt, daß

$$J(G) = x^2\, y\, F\, h \tag{6}$$

und weiter

$$J(D_1 + D_2 + D_3) = x\, y^2\, F\, h \tag{7}$$

ist, so daß sich auf Grund der vorgenommenen Zerlegung die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + (x^2\, y + x\, y^2)\, F\, h \tag{8}$$

ergibt. Machen wir nun den Ansatz

$$f(z) = z^3\, \frac{F\, h}{3} + r(z), \tag{9}$$

der natürlich wegen der frei wählbaren Restfunktion $r(z)$ keine eigentliche Vorwegnahme bedeutet, so resultiert für diese Restfunktion die Cauchysche Funktionalgleichung

$$r(x + y) = r(x) + r(y). \tag{10}$$

Nach dem, was weiter oben über $f(z)$ festgestellt wurde, ist $r(z)$ eine in jedem endlichen Intervall absolut beschränkte Funktion. Nach einem bekannten Satz[1]), der übrigens sehr einfach zu beweisen ist, muß deshalb die Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung (10) die Gestalt

$$r(z) = p\, z \tag{11}$$

aufweisen, wo p eine noch zu ermittelnde Konstante bezeichnet. Für den kritischen Leser sei noch die folgende Bemerkung angebracht: Einleitend wurde erörtert, daß eine Herleitung der Tetraederformel ohne Grenzprozeß nicht möglich sei – nun in unserm Fall ist dieser Grenzprozeß etwas verdeckt – er steckt in der exakten Begründung der Lösung (11).

Fassen wir jetzt die Ergebnisse (9) bis (11) zusammen, so haben wir für das Tetraeder $z\,T$ die folgende Volumformel

$$J(z\, T) = z^3\, \frac{F\, h}{3} + p\, z. \tag{12}$$

Bedenken wir, daß der Ausdruck (12) nichtnegativ sein muß, so folgert man offenbar

$$p \geqq 0. \tag{13}$$

Endlich zerteilen wir das Tetraeder T durch $n - 1$ parallel zur Grundfläche äquidistant geführte Schnitte in n Schichten, wo $n > 1$ eine ganze Zahl bezeichnet (vgl. Fig. 2). Die Grundflächen S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dieser Schichten zerlegen wir parkettmäßig in Dreiecke, die mit der Grundfläche des Tetraeders $(1/n)\,T$ (eigentlich) kongruent sind. Auf der Grundfläche S_i lassen sich nun i^2 Tetraeder aufstellen, die mit $(1/n)\,T$ kongruent sind und auf diesen Dreiecksflächen stehen. Alle diese Tetraeder

---

[1]) G. DARBOUX, Math. Ann. *17* (1880).

haben paarweise keine inneren Punkte gemeinsam und liegen alle in T. Aus (3) folgt nunmehr

$$(1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)\, J\left(\frac{1}{n}\, T\right) \leqq J(T). \tag{14}$$

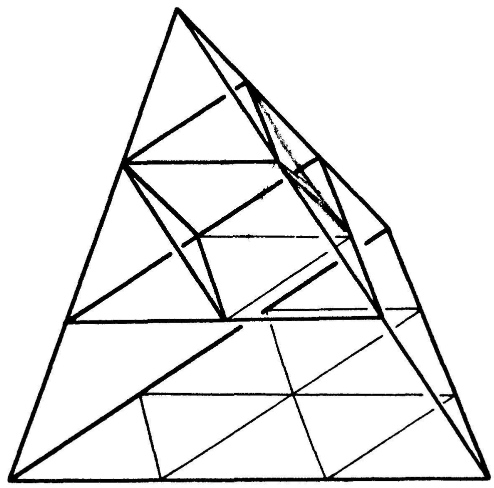

Fig. 2

Der Einsatz von (12) ergibt mit der Schätzung[1])

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{4} \tag{15}$$

und Berücksichtigung von (12) die Beziehung

$$(n^2 - 4)\, p < F\, h, \tag{16}$$

und hieraus folgt in Verbindung mit (13) offenbar

$$p = 0. \tag{17}$$

Lesen wir rückwärts, von (17) zu (11) zu (9) zu (5), so ergibt sich

$$J(T) = f(1) = \frac{F\, h}{3}. \tag{18}$$

Damit ist unser Ziel erreicht. H. HADWIGER, Bern.

Konstruktion zweier gleich großer regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind

1. *Ziel der Arbeit*

Liegen die Ecken eines Tetraeders der Reihe nach in den Begrenzungsebenen eines anderen Tetraeders, so ist das erste Tetraeder dem zweiten eingeschrieben und das zweite Tetraeder dem ersten umgeschrieben.

Wenn nun zwei Tetraeder so liegen, daß jedes dem anderen eingeschrieben ist, so ist zugleich auch jedes von ihnen dem anderen umgeschrieben. Daß solche einander

[1]) Die Summe der ersten n Quadratzahlen beträgt bekanntlich $[n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)]/6$.