Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Wir haben hier eine bequem zu rechnende Teillösung gegeben. Daß sie nicht alle im Titel genannten Dreiecke umfaßt, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Das (rechtwinklige) Dreieck mit den Eckpunkten $C(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(4, 0)$ hat die Seiten $b = 5$, $a = 4$, $c = 3$. Es wird $s = 6$, $s - a = 2$. Es sind also nicht alle Größen s, $s - a$, $s - b$, $s - c$ Quadrate rationaler Zahlen, also ist dieses Dreieck in der vorigen Lösung nicht enthalten.

L. HOLZER, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 8. Par le quatrième sommet C du rectangle construit sur les deux demi-axes OA et OB d'une ellipse, on mène la perpendiculaire p à la droite AB. Un point P variable sur p a les deux coordonnées m, n. Trouver l'enveloppe des ellipses de demi-axes m, n coaxiales à l'ellipse donnée quand P se déplace sur p. L. KOLLROS.

Lösung: Sind u, v die Linienkoordinaten der Geraden $u\,x + v\,y = 1$, so hat die Ellipse mit den Halbachsen m, n die Gleichung $(u\,m)^2 + (v\,n)^2 = 1$. Nach Voraussetzung gilt $(n - b):(m - a) = a:b$. Da die Gerade (u, v) auch die «unendlich benachbarte» Ellipse der Schar berühren muß, wird wegen $dn/dm = a/b$:

$$u^2\,m\,b + v^2\,n\,a = 0.$$

Elimination von m, n liefert $(a\,v)^2 + (b\,u)^2 = c^4\,u^2\,v^2$ mit $c^2 = a^2 - b^2$. Die Kurve ist also die Evolute der gegebenen Ellipse. (Siehe z. B. LORIA: Curve piane I, 300.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Eine weitere Lösung sandte L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 9. On projette orthogonalement un point variable de l'ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois projections. (Problème analogue dans le plan et dans l'espace pour les hyperboloïdes.) L. KOLLROS.

Lösung von L. KIEFFER, Luxemburg (hier gekürzt wiedergegeben). Es sei $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ die Gleichung des Ellipsoides; $P(u, v, w)$ sei ein Punkt auf ihm, also $(u/a)^2 + (v/b)^2 + (w/c)^2 = 1$ (1). Als Gleichung der beweglichen Ebene durch die Fußpunkte der Lote von P auf die Symmetrieebenen des Ellipsoides erhält man $(x/u) + (y/v) + (z/w) = 2$ (2). Denkt man sich die Parameter v, w als Funktionen von u und bezeichnet die Ableitungen dv/du, dw/du mit v' bzw. w', so ergibt sich aus (1) und (2):

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\,v' + \frac{w}{c^2}\,w' = 0, \quad (3) \qquad \frac{x}{u^2} + \frac{y}{v^2}\,v' + \frac{z}{w^2}\,w' = 0. \quad (4)$$

Multipliziert man beide Seiten von (4) mit λ, addiert hierzu (3) und fordert noch

$$\frac{\lambda x}{u^2} + \frac{u}{a^2} = 0, \qquad \frac{\lambda y}{v^2} + \frac{v}{b^2} = 0, \qquad \frac{\lambda z}{w^2} + \frac{w}{c^2} = 0,$$

so ergibt sich durch Addieren mit Hilfe von (1) und (2) $\lambda = -0{,}5$. Hieraus weiter

$$u = \sqrt[3]{0{,}5\,a^2\,x}, \qquad v = \sqrt[3]{0{,}5\,b^2\,y}, \qquad w = \sqrt[3]{0{,}5\,c^2\,z}.$$

Als Gleichung der Enveloppe findet man also:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt[3]{4} \qquad \text{oder} \qquad (b\,c\,x)^{2/3} + (c\,a\,y)^{2/3} + (a\,b\,z)^{2/3} = (2\,a\,b\,c)^{2/3}.$$

Aufgabe 26: Beweise für die Fläche eines Dreiecks die Formel

$$F = \frac{(p_a \sin\alpha + p_b \sin\beta + p_c \sin\gamma)^2}{2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}.$$

α, β, γ sind die Gegenwinkel der Seiten a, b, c und p_a, p_b, p_c die mit Vorzeichen versehenen Abstände der Seiten von einem beliebigen Punkt der Ebene. E. TROST.

1. Lösung: Mit r als Umkreisradius gilt

$$F = \frac{1}{2}(p_a\, a + p_b\, b + p_c\, c) = r\,(p_a \sin\alpha + p_b \sin\beta + p_c \sin\gamma).$$

Ferner ist
$$F = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = 2\, r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Durch Elimination von r aus beiden Gleichungen erhält man die verlangte Formel.

E. FRÜH, Kradolf.

2. Lösung: L'expression pour la surface S

$$S = \frac{(a\, p_a + b\, p_b + c\, p_c)^2}{4\, S} = \frac{(a\, p_a + b\, p_b + c\, p_c)^2}{2\, b\, c \sin\alpha}$$

est homogène par rapport aux lettres a, b, c et de degré zéro. On peut donc les remplacer par des quantités proportionnelles, soit respectivement $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, d'où l'on tire la formule donnée.

L. DESCLOUX, Fribourg.

Weitere Lösungen sandten ein: R. GAILLE (Lausanne), F. J. KINSKY (Timizoara, Rumänien), A. MARET (Biel), E. ROTHMUND (Zürich), B. W. SPEEKMAN (Venlo, Holland), H. R. SPEICH (Zuoz), A. STOLL (Zürich).

Aufgabe 30: Einem Dreieck vom Flächeninhalt F sollen drei Parabelbogen so eingeschrieben werden, daß jeder zwei Dreieckseiten in Eckpunkten berührt. Man berechne den Inhalt der sieben Flächenstücke, in die das Dreieck aufgeteilt wird. E. TROST.

Lösung: Da jedes Dreieck durch Affinität in ein gleichseitiges transformiert werden kann, wobei das Verhältnis der Flächen ungeändert bleibt, genügt es, ein gleichseitiges Dreieck D mit der Seite a und der Fläche F zu betrachten. Die Scheiteltangenten der Parabelbogen sind die Mittellinien in D. Der Schwerpunkt von D ist der gemeinsame Brennpunkt der drei Parabeln, da der Fußpunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Parabeltangente auf der Scheiteltangenten liegt. Somit hat jede der drei Parabeln den Parameter $p = (a/6)\sqrt{3}$. In bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Scheitel liegt und dessen x-Achse durch den Brennpunkt geht, lautet die Gleichung der Parabel P also $y^2 = (a/3)\sqrt{3}\, x$. Bringt man P mit der Schwerlinie $y = -\sqrt{3}\, x + 0{,}25\, a$ zum Schnitt, so erhält man den Punkt $T(p/6;\ a/6)$ als Schnittpunkt von P mit der einen der beiden andern Parabeln. Auf diese Weise erhält man leicht die Fläche des mittleren Stückes: $X = 5/27\, F$. Für die Fläche Y der einer Dreiecksseite anliegenden Stücke und die Fläche Z der Stücke der dritten Art gelten die Gleichungen $X + Y + 2Z = 2F/3$, $2Y + Z = F/3$. Hieraus folgt $Y = 5F/81$, $Z = 17F/81$.

S. JOSS, Bern.

Dieselbe Lösung sandte C. BINDSCHEDLER (Küsnacht). Lösungen ohne Verwendung der Affinität gingen ein von L. DESCLOUX (Fribourg) und E. ROTHMUND (Zürich).

A. STOLL bestimmt sehr elegant die spindelförmige Fläche $X + Z$, die aus zwei kongruenten Parabelsegmenten besteht. Das aus der Sehne und den Tangenten in den Endpunkten gebildete Dreieck ist ein zum halben Grunddreieck ähnliches rechtwinkliges Dreieck, dessen größere Kathete $2a/3$ ist. Seine Fläche ist somit $8F/27$, so daß $X + Z = 32F/81$.

Die Fläche X ergibt sich auch direkt aus der in bezug auf den Brennpunkt genommenen Polargleichung der Parabel durch das Integral

$$X = \frac{3}{2}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} r^2\, d\varphi = \frac{3}{8}\, p^2 \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi/2} = \frac{3}{2}\, p^2 \int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{du}{\cos^4 u} = \frac{3}{2}\, p^2 \left\{\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right\}.$$

Aufgabe 35: p und q seien natürliche Zahlen und $p \leqq q$. Dann gilt identisch in x:

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \binom{q}{n} \binom{x+n}{p+q} = \binom{x}{p} \binom{x}{q}.$$

A. STOLL.

Lösung nach K. RIEDER (Riehen). Aus der Identität

$$(1+z)^x (1+z)^n = (1+z)^{n+x} \qquad (x,\ n \text{ natürliche Zahlen})$$

ergibt sich durch Entwicklung nach z und Koeffizientenvergleichung die in x identische Gleichung

$$\binom{x+n}{p+q} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{p+q-k}. \tag{1}$$

Setzt man für n der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots, p$, so gelangt man zu folgender Umformung

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \binom{q}{n} \binom{x+n}{p+q} = \sum_{\mu=0}^{p} \left\{ \binom{x}{p+q-\mu} \sum_{\nu=0}^{p-\mu} \binom{\nu+\mu}{\mu} \binom{p}{\nu+\mu} \binom{q}{\nu+\mu} \right\}. \tag{2}$$

Zur Berechnung der einzelnen Summen benützt man neben (1) die Formel

$$\binom{x}{m} \binom{m}{n} = \binom{x}{n} \binom{x-n}{m-n} \qquad (m \geqq n)$$

und erhält für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, p$

$$\sum_{\nu=0}^{p-\mu} \binom{\nu+\mu}{\mu} \binom{p}{\nu+\mu} \binom{q}{\nu+\mu} = \sum_{\nu=0}^{p-\mu} \binom{p}{\mu} \binom{p-\mu}{\nu} \binom{q}{\nu+\mu}$$

$$= \binom{p}{\mu} \sum_{\nu=0}^{p-\mu} \binom{p-\mu}{\nu} \binom{q}{q-\mu-\nu} = \binom{p}{\mu} \binom{p+q-\mu}{q-\mu}.$$

Setzt man in (2) ein, so ergibt sich mit (1) schließlich für die rechte Seite

$$\sum_{\mu=0}^{p} \binom{p}{\mu} \binom{x}{p+q-\mu} \binom{p+q-\mu}{p} = \binom{x}{p} \sum_{\mu=0}^{p} \binom{p}{\mu} \binom{x-p}{q-\mu} = \binom{x}{p} \binom{x}{q}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) sandte eine kombinatorische Lösung. Die rechte Seite der zu beweisenden Identität stellt die Anzahl aller Kombinationen von je p Elementen a_i und q Elementen b_k $(i, k = 1, 2, \ldots, x)$ dar. Es wird gezeigt, daß diese Kombinationen sich so in $p+1$ Serien anordnen lassen, daß in der $(n+1)$-ten Serie genau so viele vorkommen, wie der auf der linken Seite stehende Summand angibt.

Von K. RIEDER (Riehen) ging noch eine zweite Lösung ein; weitere Lösungen sandten L. DESCLOUX (Fribourg) und E. ROTHMUND (Zürich).

Neue Aufgaben

46. In una curva razionale normale dello spazio S_n ad n dimensioni è inscritta una piramide variabile di $n+1$ vertici avente per baricentro un punto fisso: determinare l'inviluppo delle sue faccie.

A. LONGHI.

47. Prouver que la série

$$\frac{1}{2\,(\ln 2)^p} + \frac{1}{3\,(\ln 3)^p} + \cdots + \frac{1}{n\,(\ln n)^p} + \cdots$$

est convergente si $p > 1$, et divergente si $p \leqq 1$.

L. KOLLROS.

48. Trouver la limite de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

quand le nombre entier n augmente indéfiniment. L. KOLLROS.

Nachtrag zu Aufgabe 31 (s. Bd. III, Nr. 5, S. 103): Eine weitere Lösung wurde von S. GRÜNBAUM (Zürich) eingesandt.

Literaturüberschau

Vor uns liegt das erste Heft des ersten Bandes der Zeitschrift

Archiv der Mathematik

Herausgegeben vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) unter Leitung von W. SÜSS, Freiburg im Breisgau. Beirat: G. BOL, P. TEN BRUGGENCATE, CH. EHRESMANN, H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, H. KNESER, W. MAGNUS, CHR. PAUC, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN, H. SEIFERT, E. SPERNER, E. STIEFEL. Verlag G. Braun GmbH., Karlsruhe. Preis DM. 8.– pro Heft. (Pro Jahr sechs Hefte.)

Wir entnehmen dem Geleitwort des Herausgebers: «Die neue mathematische Fachzeitschrift, welche Mitarbeiter und Freunde des Mathematischen Forschungsinstituts für das Gesamtgebiet der Mathematik und ihrer unmittelbaren Anwendungen ins Leben rufen, soll dazu beitragen, die heutigen Schwierigkeiten im Publikationswesen zu überwinden. Diese bestehen zunächst in den unmittelbaren praktischen Folgen des deutschen Zusammenbruches und verursachen ein nur sehr langsames Wiederaufleben früherer wissenschaftlicher Fachorgane. So liegen bei den Redaktionen und mehr noch bei den Verfassern eine große Zahl unveröffentlichter Forschungsergebnisse. Sofern nicht neue Wege zur Publikation beschritten werden, bleibt ein großer Teil der geleisteten Arbeit für den Fortschritt der Wissenschaft selbst unfruchtbar. Hier zur Abhilfe beizutragen, ist eines der Ziele unserer Zeitschrift. ...

Sie veröffentlicht nur kurze Originalabhandlungen von wenigen Druckseiten. Freilich verzichtet sie hierbei nicht auf eine an sich völlig verständliche Darstellung der Beweisführung. Sie bringt außerdem kurze Selbstreferate größerer Arbeiten, aus denen gleichfalls die Methoden so weit ersichtlich sein sollen, daß der Kenner die wesentlichen Schritte dieser Beweisführung durchaus verstehen kann. Es ist vorgesehen, daß die den Selbstreferaten zugrunde liegenden größeren Arbeiten im Manuskript im Forschungsinstitut zur Einsicht niedergelegt werden. Ferner sollen von Zeit zu Zeit zusammenfassende Berichte über die Fortschritte einzelner Sondergebiete in den letzten Jahren mit ausführlicher Literaturangabe erstattet werden. Schließlich sollen Mitteilungen aus dem Fachgebiet die Verbindungen unter den Fachgenossen stärken. Der Verlag hat eine rasche Drucklegung in häufig aufeinanderfolgenden Heften zugesagt, so daß eine rasche Bekanntgabe der Forschungsergebnisse erwartet werden kann.

Wir sind glücklich, zu unseren Plänen schon die Zustimmung vieler deutscher und ausländischer Kollegen gefunden zu haben, die uns in dem Bestreben unterstützen wollen, in sachlicher Zusammenarbeit die Verbindung der Fachkollegen über die Grenzen hinweg wieder herzustellen.»

Wir begrüßen das neue Unternehmen. Schon das erste Heft ist in seiner Mannigfaltigkeit vielversprechend. Wir behalten uns vor, auf einzelne Arbeiten hier noch näher einzugehen.