Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Das ergibt sich daraus, daß die Affinität in bezug auf die Hauptachse, welche vom Hauptkreis zur Ellipse führt, kombiniert mit einer Affinität in bezug auf die kleine Achse mit demselben Affinitätsverhältnis b/a eine Ähnlichkeitstransformation ergeben muß, die Ellipse also durch die zweite Affinität in den Kreis vom Radius b übergeführt wird. Damit ist C bewiesen.

Der Spezialfall $\lambda = 1$ (die Ellipse ein Kreis) entspricht, wie schon erwähnt, einem Grenzfall bei A und B.

Wünscht man den Satz C auf noch elementarerem Weg, ohne Benützung der harmonischen Eigenschaft von Pol und Polare in bezug auf den Kreis, zu beweisen, so führt, außer dem unter III angegebenen kurzen Beweis (siehe unten), auch der folgende Weg in einfacher Weise zum Ziel (Fig. 10):

Es sei F_i^* das Spiegelbild von F_i in bezug auf die Tangente t, u_i das Lot von F_i auf t, v_1, v_2 die Abschnitte auf der Tangente von P bis zum Hauptkreis, y und y' die Abstände der entsprechenden Punkte P und P' von der Hauptachse. Dann gilt

$$r_1 : r_2 = F_1 F_1^* P : \triangle F_1 F_2 P = \triangle F_1 F_2 P : \triangle F_2 F_2^* P$$

$$(y\, e)^2 = (u_1 v_1)\,(u_2 v_2)$$

$v_1 v_2$ ist der absolute Betrag der Potenz von P in bezug auf den Hauptkreis, also

$$v_1 v_2 = (y' - y)\,(y' + y)$$

und
$$u_1 u_2 = b^2.$$

Hieraus $(ye)^2 = b^2\,(y'^2 - y^2)$, also y'/y konstant.

III. *Direkter Übergang von A zu C*

Da der Hauptkreis ein Apollonischer Kreis bezüglich der Strecke $\overline{FF_l}$ ist, so folgt in Verbindung mit Definition A, wenn die Strecken $\overline{PF}$, $\overline{P'F}$ mit s, s', und die Strecken $\overline{PP_l}$, $\overline{P'F_l}$ mit u, v bezeichnet werden (Fig. 11):

$$\varepsilon^2 = \frac{s'^2}{v^2} = \frac{s^2}{u^2} = \frac{s'^2 - s^2}{v^2 - u^2} = \frac{y'^2 - y^2}{y'^2}$$

und hieraus die Konstanz von y/y'. Hiebei bedeuten y und y' wieder die Abstände entsprechender Punkte von der Hauptachse.

C. Bindschedler, Küsnacht-Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche*

Die bekannte verschärfte isoperimetrische Ungleichung von T. Bonnesen[1]) für einen konvexen Bereich K heißt

$$L^2 - 4\,\pi F \geqq (L - 2\,\pi\, r)^2, \tag{1}$$

[1]) Vgl. hierüber weiteres in T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Verlag J. Springer, Berlin 1934 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 3) insbesondere S. 112/113.

wobei F und L den Flächeninhalt und den Umfang, r den Inkreisradius von K bezeichnen. Ein kurz zusammenfaßbarer Beweis ist der folgende:

Zunächst verifiziere man die Flächenformel

$$F = \int_0^r L(\lambda)\, d\lambda \tag{2}$$

für konvexe Polygone K, wobei $L(\lambda)$ den Umfang des inneren Parallelbereiches $K(\lambda)$ von K im Abstand λ bedeutet. — Aus der leicht zu verifizierenden Tatsache, daß der äußere Parallelbereich von $K(\lambda)$ im Abstand λ seinerseits ein Teilbereich von K sein muß, ergibt sich nach der Steinerschen Formel, welche für konvexe Polygone durchaus elementar ist, die Ungleichung

$$L(\lambda) + 2\pi\lambda \leqq L. \tag{3}$$

Durch Integration nach λ von 0 bis r folgt hieraus

$$F + \pi r^2 \leqq L r. \tag{4}$$

Dies ist aber nur eine andere Schreibweise der Bonnesenschen Ungleichung (1) für Polygone. Die allgemeine Gültigkeit gewinnt man durch Approximation in der üblichen Weise.

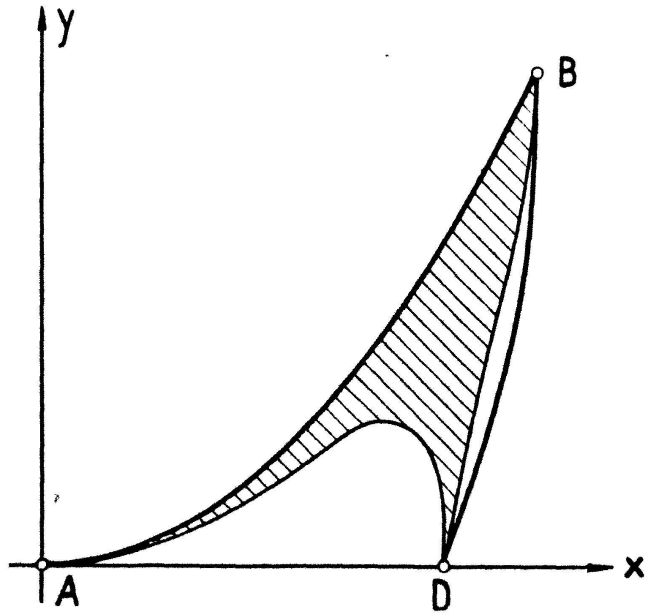
H. HADWIGER, Bern.

II. *Notiz zur fehlenden Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper*

Ein in dieser Zeitschrift (Bd. II, Nr. 3, S. 51–54) erschienener Artikel befaßte sich mit einem im Titel dieser Mitteilung angedeuteten Problem. Es handelt sich darum, der klassischen Ungleichung von MINKOWSKI

$$F^2 - 3MV \geqq 0 \tag{1}$$

eine sicher vorhandene, aber noch nicht bekannte Ungleichung gegenüberzustellen. Hier bedeuten V, F und M das Volumen, die Oberfläche und das Krümmungsintegral



eines konvexen Körpers. — Es soll hier kurz mitgeteilt werden, daß diese bisher fehlende Ungleichung, allerdings vorläufig noch unter Beschränkung auf konvexe Rotationskörper, nach einläßlicheren Studien von P. GLUR, H. BIERI und dem Unterzeichneten aufgefunden werden konnte. Sie ist indessen transzendent und recht kompliziert und kann an dieser Stelle nicht näher erörtert werden. Während in der Minkowskischen Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen für die Kappenkörper der Kugel steht, ist dies bei der neuen Ungleichung für die symmetrischen Kugelzonen der Fall. Die letztgenannte Körperschar ist vermutlich auch dann extremal, wenn man sich von der Voraussetzung der Rotationssymmetrie freimacht.

Ausgehend von der für Rotationskörper als gültig nachgewiesenen exakten Ungleichung kann man auf schwächere, also nicht mehr scharfe, aber dafür einfache und explizite anschreibbare Ungleichungen schließen. So erreicht man

$$\pi^2 M^4 (M^2 - 4\pi F) \geqq (\pi^2 - 8)(M^3 - 48\pi^2 V)^2. \tag{2}$$

Übertragen wir (1) und (2) in das Blaschkesche Diagramm (vgl. den eingangs erwähnten Artikel), indem man dem Wertetripel (V, F, M) das kartesische Paar (x, y) vermöge des Ansatzes

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}; \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}$$

zuordnet, so ergeben sich die Ungleichungen

$$y \leqq x^2, \tag{1a}$$

$$\pi^2 (1 - x) \leqq (\pi^2 - 8)(1 - y)^2. \tag{2a}$$

Diese beiden Relationen bedeuten, daß der Diagrammbereich (vgl. Figur), der den Rotationskörpern entspricht und der im positiven Quadranten $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ der Diagrammebene liegt, ganz von den zwei Parabelbögen AB und BD sowie vom Achsenstück AD umschlossen ist (der Bereich selbst ist in der Figur schraffiert angedeutet).

H. HADWIGER, Bern.

III. *Über die mittlere Schnittpunktszahl konvexer Kurven und Isoperimetrie*

Wir geben hier eine Fassung bekannter integralgeometrischer Ergebnisse[1]), die sich unmittelbar an Gedanken von POINCARÉ, SANTALÓ, BLASCHKE und HADWIGER[2]) anschließt, wobei eine einfache, geometrisch-statistische Interpretation gewisser «isoperimetrischer Defizite» erzielt wird.

Wir werfen auf die (horizontale) Ebene eines festen konvexen Bereiches G_0 vom Inhalt F_0 und Umfang L_0 eine zweite konvexe Scheibe G vom Inhalt F und Umfang L und berücksichtigen nur die Fälle, wo die Scheibe G den Bereich G_0 trifft. Nun bestimmen wir nach einer großen Zahl von Würfen den Mittelwert der Schnittpunktszahl der Begrenzungskurven von G und G_0. Bezeichnen wir diesen Mittelwert mit $\bar{n}(G, G_0)$, so werden wir Übereinstimmung mit der Relation

$$\frac{L L_0 - 2\pi (F + F_0)}{L L_0 + 2\pi (F + F_0)} = \frac{1}{2}\,\bar{n}(G, G_0) - 1$$

konstatieren können. Die angeschriebene Relation ist in der Tat exakt richtig, wenn man für $\bar{n}(G, G_0)$ den mathematischen Mittelwert

$$\bar{n}(G, G_0) = \frac{\displaystyle\int_{G G_0 \neq 0} n\,\dot{G}}{\displaystyle\int_{G G_0 \neq 0} \dot{G}}$$

im Sinne der ebenen Integralgeometrie einsetzt. In der obenstehenden Formel bedeutet $\dot{G}$ die kinematische Dichte des beweglichen Bereiches G, und die Integration hat sich,

---

[1]) Vgl. W. BLASCHKE, Vorlesungen über Integralgeometrie, I. Heft, 2. erweiterte Aufl. (Leipzig und Berlin 1936).

[2]) H. HADWIGER, Über Mittelwerte im Figurengitter, Comm. Math. Helv. *11*, 221–233 (1938/39); Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate, Comm. Math. Helv. *13*, 195–200 (1940/41).

wie angedeutet, über alle Lagen von G zu erstrecken, für welche $G\,G_0 \neq 0$ ist. — Nach der Formel von POINCARÉ bzw. SANTALÓ ergibt sich nämlich

$$\bar{n}(G, G_0) = \frac{4\,L\,L_0}{L\,L_0 + 2\pi(F + F_0)}.$$

Nun beachten wir noch die Sonderfälle, in denen für G_0 ein mit G kongruenter Bereich bzw. ein flächengleicher Kreis K gewählt wird.

Wir erhalten so die Beziehungen

$$\frac{L^2 - 4\pi F}{L^2 + 4\pi F} = \frac{1}{2}\bar{n}(G, G_0) - 1; \quad \frac{L - \sqrt{4\pi F}}{L + \sqrt{4\pi F}} = \frac{1}{2}\bar{n}(G, K) - 1.$$

Hierbei können die linken Seiten als isoperimetrische Defizite, welche gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant sind, betrachtet werden. Daß die rechten Seiten nicht negativ sein können, ist unmittelbar einleuchtend, da in den beiden betrachteten Sonderfällen (fast) immer $n(G, G_0) \geqq 2$ ist, falls die beiden Bereiche sich treffen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß, obwohl $n(G, G_0)$ beliebig groß sein kann, der Mittelwert $\bar{n}(G, G_0) \leqq 4$ ausfällt. Für einen umfangsgleichen Kreis K' findet man $\bar{n}(G, K') \leqq 8/3$. L. FEJES TÓTH, Budapest.

IV. *Über Dreiecke mit ganzzahligen Koordinaten und ganzzahligen Seiten*

Betrachten wir ein Dreieck der im Titel genannten Eigenschaft, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit etwa den Eckpunkt C im Ursprung annehmen. Wir ersetzen die beiden anderen Eckpunkte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ durch die komplexen Zahlen $\alpha = x_1 + y_1 i$, $\beta = x_2 + y_2 i$. Es sollen nun die Zahlen α, β, $\alpha - \beta$ Quadrate ganzer Zahlen als Normen haben.

Dazu genügt, daß $\alpha = \xi^2$, $\beta = \eta^2$, $\alpha - \beta = \zeta^2$ oder $\eta^2 + \zeta^2 = \xi^2$ sei. Dabei sind ξ, η, ζ ganze Zahlen des Körpers $R(i)$, wo R der rationale Zahlkörper ist. Es ist dies gewissermaßen die pythagoreische Gleichung in diesem Zahlkörper. Der Ansatz $\xi = \mu^2 + \nu^2$, $\eta = 2\,\mu\,\nu$, $\zeta = \mu^2 - \nu^2$ löst sie, womit sich dann die Koordinaten der Eckpunkte mit $\alpha = (\mu^2 + \nu^2)^2$, $\beta = 4\,\mu^2\,\nu^2$, $\alpha - \beta = (\mu^2 - \nu^2)^2$ ergeben. Die Dreieckseiten $CA = b$, $AB = c$, $BC = a$ ergeben sich, wenn N die Norm der komplexen Zahl bedeutet: $b = N(\mu^2 + \nu^2)$, $c = N(2\,\mu\,\nu)$, $a = N(\mu^2 - \nu^2)$.

Wird im folgenden die Konjugierte zu einer komplexen Zahl mit einem Querstrich angedeutet, so wird der Reihe nach

$$\begin{aligned} b &= (\mu\,\bar{\mu})^2 + (\mu\,\bar{\nu})^2 + (\bar{\mu}\,\nu)^2 + (\nu\,\bar{\nu})^2, \\ c &= 4\,\mu\,\nu\,\bar{\mu}\,\bar{\nu}, \\ a &= (\mu\,\bar{\mu})^2 - (\mu\,\bar{\nu})^2 - (\nu\,\bar{\mu})^2 + (\nu\,\bar{\nu})^2. \end{aligned}$$

Es folgt durch Addition und Division durch 2 mit $a + b + c = 2\,s$:

$$s = (\mu\,\bar{\mu} + \nu\,\bar{\nu})^2, \qquad s - a = (\mu\,\bar{\nu} + \bar{\mu}\,\nu)^2,$$
$$s - b = -(\bar{\mu}\,\nu - \bar{\nu}\,\mu)^2, \qquad s - c = (\mu\,\bar{\mu} - \nu\,\bar{\nu})^2.$$

Rechts stehen überall Quadrate ganzer rationaler Zahlen, auch bei $s - b$, da der Ausdruck rechts unter dem Quadratzeichen rein imaginär ist. Wir haben gewissermaßen ein heronisches Dreieck höherer Ordnung, indem nicht nur das Produkt $s(s-a)(s-b)(s-c)$, sondern jeder einzelne Faktor ein Quadrat ist.

Es sind dann nicht nur In- und Umkreisradius und die Sinus aller Dreieckswinkel, sondern auch deren Kosinus und die sämtlichen Funktionen der halben Dreieckswinkel rational.

Ein Beispiel: Sei $\mu = 2 + i$, $\nu = 2\,i$. Dann ist $\alpha = 15 - 8\,i$, $\beta = -48 - 64\,i$, und das Dreieck hat die Eckpunkte $A(15, -8)$, $B(-48, -64)$, $C(0, 0)$. Die Seiten werden $b = 17$, $c = 65$, $a = 80$, man hat $s = 81$, $s - a = 1$, $s - b = 64$, $s - c = 16$; diese letzten Zahlen sind also alle Quadrate.

Wir haben hier eine bequem zu rechnende Teillösung gegeben. Daß sie nicht alle im Titel genannten Dreiecke umfaßt, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Das (rechtwinklige) Dreieck mit den Eckpunkten $C(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(4, 0)$ hat die Seiten $b = 5$, $a = 4$, $c = 3$. Es wird $s = 6$, $s - a = 2$. Es sind also nicht alle Größen s, $s - a$, $s - b$, $s - c$ Quadrate rationaler Zahlen, also ist dieses Dreieck in der vorigen Lösung nicht enthalten.

L. HOLZER, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 8. Par le quatrième sommet C du rectangle construit sur les deux demi-axes OA et OB d'une ellipse, on mène la perpendiculaire p à la droite AB. Un point P variable sur p a les deux coordonnées m, n. Trouver l'enveloppe des ellipses de demi-axes m, n coaxiales à l'ellipse donnée quand P se déplace sur p. L. KOLLROS.

Lösung: Sind u, v die Linienkoordinaten der Geraden $u\,x + v\,y = 1$, so hat die Ellipse mit den Halbachsen m, n die Gleichung $(u\,m)^2 + (v\,n)^2 = 1$. Nach Voraussetzung gilt $(n - b):(m - a) = a:b$. Da die Gerade (u, v) auch die «unendlich benachbarte» Ellipse der Schar berühren muß, wird wegen $dn/dm = a/b$:

$$u^2\,m\,b + v^2\,n\,a = 0.$$

Elimination von m, n liefert $(a\,v)^2 + (b\,u)^2 = c^4\,u^2\,v^2$ mit $c^2 = a^2 - b^2$. Die Kurve ist also die Evolute der gegebenen Ellipse. (Siehe z. B. LORIA: Curve piane I, 300.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Eine weitere Lösung sandte L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 9. On projette orthogonalement un point variable de l'ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois projections. (Problème analogue dans le plan et dans l'espace pour les hyperboloïdes.) L. KOLLROS.

Lösung von L. KIEFFER, Luxemburg (hier gekürzt wiedergegeben). Es sei $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ die Gleichung des Ellipsoides; $P(u, v, w)$ sei ein Punkt auf ihm, also $(u/a)^2 + (v/b)^2 + (w/c)^2 = 1$ (1). Als Gleichung der beweglichen Ebene durch die Fußpunkte der Lote von P auf die Symmetrieebenen des Ellipsoides erhält man $(x/u) + (y/v) + (z/w) = 2$ (2). Denkt man sich die Parameter v, w als Funktionen von u und bezeichnet die Ableitungen dv/du, dw/du mit v' bzw. w', so ergibt sich aus (1) und (2):

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\,v' + \frac{w}{c^2}\,w' = 0, \quad (3) \qquad \frac{x}{u^2} + \frac{y}{v^2}\,v' + \frac{z}{w^2}\,w' = 0. \quad (4)$$

Multipliziert man beide Seiten von (4) mit λ, addiert hierzu (3) und fordert noch

$$\frac{\lambda\,x}{u^2} + \frac{u}{a^2} = 0, \qquad \frac{\lambda\,y}{v^2} + \frac{v}{b^2} = 0, \qquad \frac{\lambda\,z}{w^2} + \frac{w}{c^2} = 0,$$

so ergibt sich durch Addieren mit Hilfe von (1) und (2) $\lambda = -0{,}5$. Hieraus weiter

$$u = \sqrt[3]{0{,}5\,a^2\,x}, \qquad v = \sqrt[3]{0{,}5\,b^2\,y}, \qquad w = \sqrt[3]{0{,}5\,c^2\,z}.$$

Als Gleichung der Enveloppe findet man also:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt[3]{4} \qquad \text{oder} \qquad (b\,c\,x)^{2/3} + (c\,a\,y)^{2/3} + (a\,b\,z)^{2/3} = (2\,a\,b\,c)^{2/3}.$$

Aufgabe 26: Beweise für die Fläche eines Dreiecks die Formel

$$F = \frac{(p_a \sin\alpha + p_b \sin\beta + p_c \sin\gamma)^2}{2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}.$$

α, β, γ sind die Gegenwinkel der Seiten a, b, c und p_a, p_b, p_c die mit Vorzeichen versehenen Abstände der Seiten von einem beliebigen Punkt der Ebene. E. TROST.