Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 6

Artikel: Zur Elementargeometrie der Ellipse
Autor: Bindschedler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13582

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band III Nr. 6 Seiten 105–120 Basel, 15. November 1948

Zur Elementargeometrie der Ellipse

Die planimetrische Behandlung der Ellipse benützt gewöhnlich eine der drei folgenden Aussagen als Definition der Ellipse (während die beiden andern dann Lehrsätze werden):

A. Die Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden in einem konstanten Verhältnis $\varepsilon < 1$ stehen.

B. Die Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten eine konstante Summe haben.

C. Die Ellipse ist die normal-affine Figur eines Kreises in bezug auf einen Durchmesser des letztern als Affinitätsachse. (Die an sich überflüssige Bedingung für die Achse ist wohl zweckmäßig.)

Am verbreitetsten ist die Definition B; in theoretischer Hinsicht verdient aber wohl A den Vorzug, da man durch bloße Aufhebung der Bedingung $\varepsilon < 1$ eine allgemeine Definition der Kegelschnitte erhält (siehe auch das nachgelassene Werk von HENRI LEBESGUE, Les coniques [Paris 1942]). Allerdings erscheint dabei der Kreis nicht als Spezialfall der Ellipse, sondern als Grenzfall (wie übrigens bei exakter Auffassung auch in B).

Im folgenden soll auf möglichst einfachem Weg aus Definition A Satz B, aus Satz B Satz C, und schließlich ohne Vermittlung von B aus Definition A direkt Satz C abgeleitet werden. Auf oder nahe an diesem Weg findet man dabei einige der Haupteigenschaften der Ellipse (mit Ausnahme derjenigen über konjugierte Durchmesser und über den Flächeninhalt, die man am natürlichsten von C aus erhalten würde). Obwohl versucht wurde, ausgetretene Wege zu vermeiden und z. B. auf die Verwendung des Leitkreises verzichtet wurde, ist in Anbetracht der überaus umfangreichen Literatur über den Gegenstand kaum anzunehmen, daß in den hier gegebenen Beweisgängen etwas Neues zu finden ist. Auf eine hierauf bezügliche Durchsicht dieser Literatur wird der Verfasser der vorliegenden kleinen Arbeit wohl verzichten dürfen.

Die meisten der hier folgenden Entwicklungen gelten natürlich fast ohne Änderung auch für die Hyperbel und, wo der zweite Brennpunkt nicht im Spiel ist, für die Parabel.

I. *Von der Definition A zu Satz B*

Im Anschluß an die Definition A wird man die klassische Aufgabe nicht übersehen (NEWTON: Principia, 1. Buch, § 44), einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch drei gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 geht und einen gegebenen Brennpunkt F hat. (Die

gesuchte Leitlinie teilt die Strecke $\overline{P_i P_k}$ im Verhältnis $\pm \overline{P_i F}/\overline{P_k F}$; von den Teilungspunkten auf den Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ liegen nach MENELAOS [Umkehrung] viermal je 3 auf einer Geraden.) Die Beschränkung auf die Ellipse wäre hier nicht zweckmäßig, da auch bei lauter positiven Teilverhältnissen der Kegelschnitt keine Ellipse zu sein braucht.

Es seien nun F, l Brennpunkt und Leitlinie einer Ellipse. Die Normalprojektion eines beliebigen Punktes P der Ebene auf eine Gerade g wird im folgenden mit P_g bezeichnet. FF_l ist Symmetrieachse der Ellipse. Die Hauptscheitel A, B teilen die Strecke $\overline{FF_l}$ harmonisch im Verhältnis ε.

Satz 1. Der Abschnitt einer Kurventangente zwischen Berührungspunkt und Leitlinie erscheint aus dem Brennpunkt unter einem rechten Winkel. Beweis (nach LEBESGUE): Schneidet die Sekante PQ die Leitlinie in S, so liegt S wegen

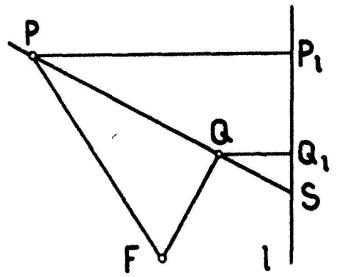

Fig. 1

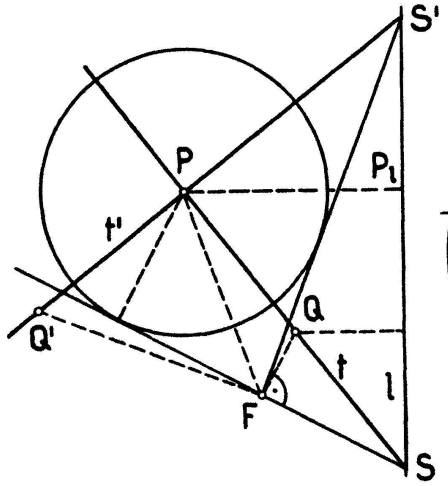

Fig. 2

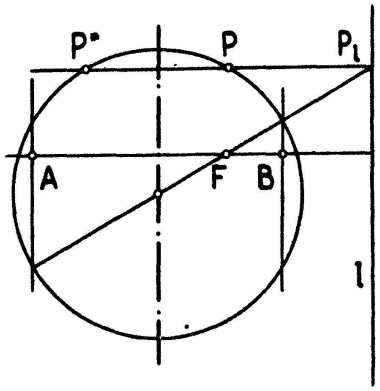

Fig. 3

$\overline{SP}/\overline{SQ} = \overline{PP_l}/\overline{QQ_l} = \overline{FP}/\overline{FQ}$ auf der Außenwinkelhalbierenden des Dreiecks PFQ (Fig. 1). Beim Grenzübergang $Q \to P$ geht die dazu senkrechte Innenwinkelhalbierende in FP über, was die Behauptung ist.

Aufgabe. Man lege von einem Punkt P der Ebene die Tangenten an die Ellipse. Lösung (Fig. 2): Die Tangenten aus F an den Kreis um P mit Radius $\varepsilon \cdot \overline{PP_l}$ schneiden die Leitlinie in Punkten der gesuchten Ellipsentangenten t, t'. Die Berührungspunkte Q, Q' liegen auf den Normalen in F zu den Kreistangenten. Zwei Lösungen, wenn $\overline{PF} > \varepsilon \cdot \overline{PP_l}$.

Diese Konstruktion bringt den sogenannten ersten Ponceletschen Satz zu fast unmittelbarer Evidenz:

Satz 2. Die Abschnitte der beiden Tangenten von ihrem Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten erscheinen vom Brennpunkt aus unter gleichen Winkeln.

Man hat nur zu beachten, daß die Geraden FQ, FQ' mit den Kreistangenten gegensinnig gleiche Winkel bilden (als Unterschiede des Winkels der Kreistangenten gegenüber einem Rechten).

Die entsprechende Aufgabe «Schnitt der Ellipse mit einer Geraden g» bietet keine Schwierigkeiten ($\overline{PF}/\overline{PS} = \overline{PF}/\overline{PP_l} \cdot \overline{PP_l}/\overline{PS}$, S Schnittpunkt von g mit l).

Satz 3. Die Ellipse besitzt eine zweite Symmetrieachse, die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke ihrer Hauptscheitel.

Beweis (Fig. 3). Ist P ein Kurvenpunkt, so liegt auf der Geraden PP_l im allgemeinen genau ein weiterer Punkt P^* der Kurve, nämlich der Schnittpunkt von PP_l mit dem Apollonischen Kreis bezüglich der Strecke $\overline{FP_l}$, der dieselbe im Verhältnis $\pm\,\varepsilon$ teilt. Sein Durchmesser wird aus der Geraden FP_l herausgeschnitten von den Tangenten in den Hauptscheiteln A und B; der geometrische Ort für den Mittelpunkt ist also die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, und diese ist dann gleichzeitig Symmetrieachse für $\overline{PP^*}$.

(Dieser Beweis wird auch von LEBESGUE erwähnt unter Hinweis auf ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE).

Durch Spiegelung von F und l an dieser zweiten Symmetrieachse nach F^* und l^* erhält man nun sofort die fundamentale Eigenschaft:

Satz 4. Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist konstant.

Dies folgt aus $\overline{PF} + \overline{PF^*} = \varepsilon \cdot \overline{PP_l} + \varepsilon \cdot \overline{PP_{l^*}} = \varepsilon \cdot \overline{P_l P_{l^*}}$.

Bezeichnen wir diese konstante Summe der «Brennstrahlen» mit $2a$ und den Mittelpunkt der Kurve mit M, so erhält man, da die Beziehung $\overline{PF} + \overline{PF^*} = 2\,a$ auch für die Scheitel A und B gilt, in bekannter Weise $2\,a = \overline{AB}$, $a = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Zum vollständigen Beweis von Satz B ist es noch nötig, zu zeigen, daß jeder Punkt P des Ortes $\overline{PF} + \overline{PF^*} = 2\,a$ auch der Ellipse im Sinn von Definition A angehört. Da der fragliche Punkt nicht außerhalb des Kreises um M mit Radius a («Hauptkreis») liegen kann (die Schwerlinie $\overline{PM}$ des Dreiecks FPF^* ist kleiner als das arithmetische Mittel der Seiten $\overline{PF}$, $\overline{PF^*}$), und da es auf einer Halbgeraden h, die in einem Punkt H der Strecke $\overline{AB}$ senkrecht zu ihr errichtet wird, nur *einen* solchen Punkt P geben kann, müssen wir nur nachweisen, daß eine solche Halbgerade auch die Ellipse schneidet. Der Schnittpunkt ist dann nach Satz 4 identisch mit P.

Die Existenz dieses Schnittpunktes folgt aber daraus, daß für einen auf h sich bewegenden Punkt Q das Verhältnis $\overline{QF}/\overline{QQ_l}$ sich mit Q stetig ändert, für $Q \equiv H$ kleiner als ε ist, außerhalb des Hauptkreises aber sicher größer als ε. (Dieser Kreis ist ja ein Apollonischer Kreis bezüglich der Strecke $\overline{FF_l}$).

Damit ist der Satz B vollständig bewiesen. Sind C, D die Endpunkte der «kleinen Achse», so wird für $\overline{MC} = \overline{MD} = b$, $\overline{mF} = e$, $b^2 = a^2 - e^2$. Aus $\overline{CF}/\overline{CC_l} = \varepsilon$ folgt $\overline{MM_l} = a/\varepsilon$ und, da $\overline{MF} \cdot \overline{MM_l} = a^2$, $e = \varepsilon\, a$.

Bei festgehaltenen Scheiteln rückt, falls man zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergeht, die Leitlinie ins Unendliche.

II. *Von Satz B zu Satz C*

Satz 5. Die Ellipsentangente halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen des Berührungspunktes (Fig. 4).

Beweis: Die Brennpunkte werden in diesem Abschnitt mit F_1, F_2 bezeichnet, die Leitlinien mit l_1, l_2, die Brennstrahlen eines Punktes P mit r_1, r_2. Ferner sei $\overline{PP_{l_1}} = u_1$, $\overline{PP_{l_2}} = u_2$ und die Tangentenabschnitte bis zu den Leitlinien seien t_1, t_2.

Aus $\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}$ und $\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2}$ folgt $\frac{r_1}{t_1} = \frac{r_2}{t_2}$.

Die rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten r_i und den Hypotenusen t_i sind also ähnlich.

Als einfache Anwendung dieses Satzes folge hier die Konstruktion der Krümmungskreise in den Scheiteln.

a) Die Krümmung in den Hauptscheiteln.

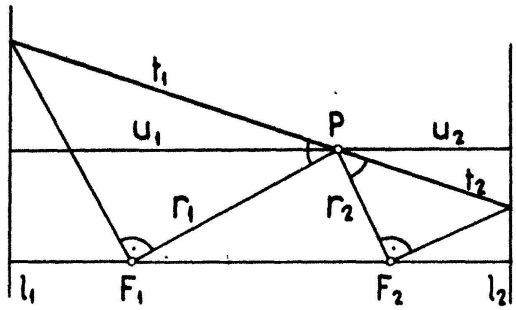

Fig. 4

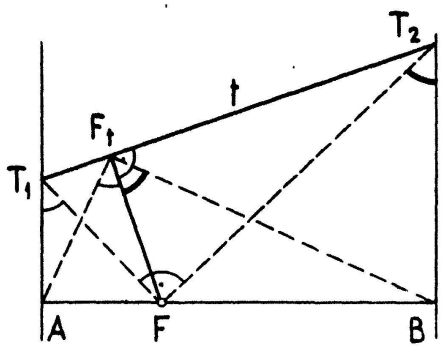

Fig. 5

Da die Normale in einem Kurvenpunkt P als Winkelhalbierende im Dreieck F_1PF_2 die Strecke $\overline{F_1F_2}$ im Verhältnis $\overline{PF_1}/\overline{PF_2}$ teilt und beim Grenzübergang $P \to A$ oder $P \to B$ dieser Teilungspunkt zum Krümmungszentrum K wird, so teilt K die Strecke $\overline{F_1F_2}$ im Verhältnis $(a-e)/(a+e)$ resp. $(a+e)/(a-e)$. Hieraus ergibt sich dann der Krümmungsradius $\varrho_A = b^2/a$.

b) Die Krümmung in den Nebenscheiteln.

Die Kurvennormale in einem Punkt P trifft die Nebenachse in ihrem Schnittpunkt

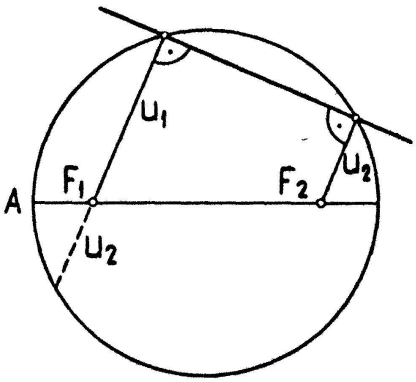

Fig. 6

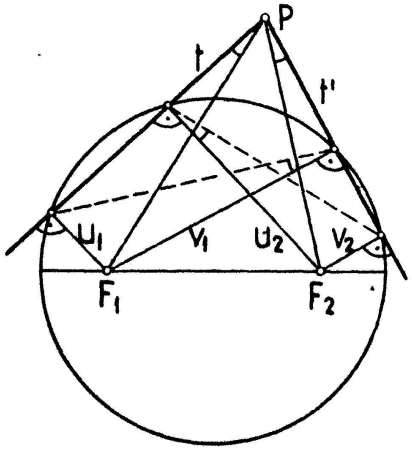

Fig. 7

mit dem Umkreis des Dreiecks F_1PF_2. Das Krümmungszentrum für den Scheitel C liegt also auf der Normalen in F_i zu F_iC, woraus sich sofort $\varrho_C = a^2/b$ ergibt.

Satz 6. Der Abschnitt einer beliebigen Kurventangente zwischen den Tangenten in den Hauptscheiteln erscheint von einem Brennpunkt aus unter rechtem Winkel. Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 2.

Satz 7. Der Fußpunkt des Lotes von einem Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf dem Hauptkreis (Fig. 5).

Sind T_1, T_2 die Schnittpunkte der Tangente t mit den Tangenten in A und B, so zeigen die beiden Sehnenvierecke AFF_tT_1, BFF_tT_2, daß die beiden nach Satz 6 komplementären Winkel AT_1F, BT_2F gleich den Winkeln AF_tF, BF_tF sind. F_t liegt also auf dem Thales-Kreis über $\overline{AB}$.

Aus Satz 7 ergibt sich die bekannte Enveloppenkonstruktion der Ellipse.

Satz 8. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer veränderlichen Tangente ist konstant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse (Fig. 6).

Dieses Produkt ist nämlich gleich dem absoluten Betrag der Potenz eines Brennpunktes in bezug auf den Hauptkreis, also gleich $(a + e)(a - e) = b^2$.

Satz 9. Eine veränderliche Tangente schneidet die Tangenten in den Hauptscheiteln so, daß das Produkt der Abschnitte auf den letztern konstant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse ist.

Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AFT_1 und BT_2F. (Bezeichnungen wie in Satz 7).

Wir schalten hier noch zwei Sätze ein, von denen weiter kein Gebrauch gemacht wird.

Satz 10 (sog. 2. Satz von PONCELET): Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Ebene mit den beiden Brennpunkten, so schließen diese Verbindungsgeraden mit den beiden Tangenten aus P gleiche Winkel ein (Fig. 7).

Beweis. Die Lote u_1, v_1 aus F_1 auf die Tangenten bestimmen ein Dreieck $\triangle_1$, das ähnlich ist zu dem entsprechend gebildeten Dreieck $\triangle_2$ mit den Seiten u_2, v_2. Denn aus $u_1 u_2 = v_1 v_2$ folgt $u_1/v_1 = v_2/u_2$, und die Winkel bei F_1 und F_2 sind gleich. Die Winkel, deren Gleichheit in Satz 10 behauptet wird, sind aber, wie aus der Betrachtung der Sehnenvierecke hervorgeht, die durch t, t', u_1, v_1 und t, t', u_2, v_2 bestimmt werden, gleich einem Paar homologer Winkel in jenen ähnlichen Dreiecken.

Bemerkung: Da beim Beweis von Satz 10 nur die Sätze 6 bis 8, nicht aber 5, benützt wurden, könnte Satz 5 hier als Spezialfall (P auf der Kurve) seinen Platz finden.

Satz 11. Der geometrische Ort des Punktes, von dem aus die Ellipse unter rechtem Winkel erscheint, ist ein zum Hauptkreis konzentrischer Kreis.

Beweis. Wenn in Satz 10 $t \perp t'$, so sind die dort benützten Sehnenvierecke Rechtecke. Die Potenz von P in bezug auf den Hauptkreis ist dann gleich der Potenz von F_{2t} in bezug auf den Thales-Kreis über F_1F_2, also konstant.

Wir wenden uns nun, anschließend an die Sätze 8 und 9, dem Satz C zu. Wir definieren als «entsprechende Punkte» von Ellipse und Hauptkreis solche Punkte der beiden Linien, die auf dem gleichen Lot zur Hauptachse und auf derselben Seite der letzteren liegen. Dann gilt

Satz 12. Die Tangenten in entsprechenden Punkten von Ellipse und Hauptkreis schneiden sich auf der großen Achse.

Beweis. Tangente t und Normale n trennen, als Winkelhalbierende im Dreieck F_1PF_2, die Punkte F_1, F_2 harmonisch in T und N (Fig. 8). Durch Normalprojektion auf t erhält man eine harmonische Trennung von F_{1t}, F_{2t} durch T und P. Da die Punkte F_{it} auf dem Hauptkreis liegen, liegt P auf der Polaren von T in bezug auf diesen Kreis; d. h. TP' ist Kreistangente in P'.

Satz 13. Das Verhältnis der Abstände entsprechender Punkte von Ellipse und Hauptkreis von der Hauptachse ist konstant und gleich b/a (Fig. 9).

Beweis. Die Tangenten in entsprechenden Punkten P, P', die sich nach Satz 12 auf der Hauptachse schneiden, treffen die Tangenten in A und B in den Punkten U, U' und V, V'.

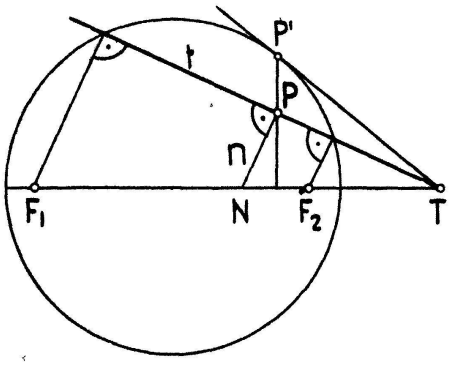

Fig. 8

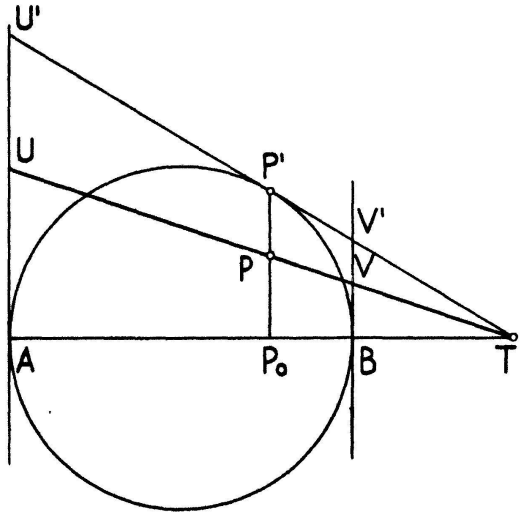

Fig. 9

Nun ist $\overline{AU'} \cdot \overline{BV'} = a^2$ und nach Satz 9 $\overline{AU} \cdot \overline{BV} = b^2$, also

$$\left(\frac{\overline{PP_0}}{\overline{P'P_0}}\right)^2 = \frac{\overline{AU}}{\overline{AU'}} \cdot \frac{\overline{BV}}{\overline{BV'}} = \frac{b^2}{a^2}$$

(P_0 Normalprojektion von P auf AB),

$$\frac{\overline{PP_0}}{\overline{P'P_0}} = \frac{b}{a}.$$

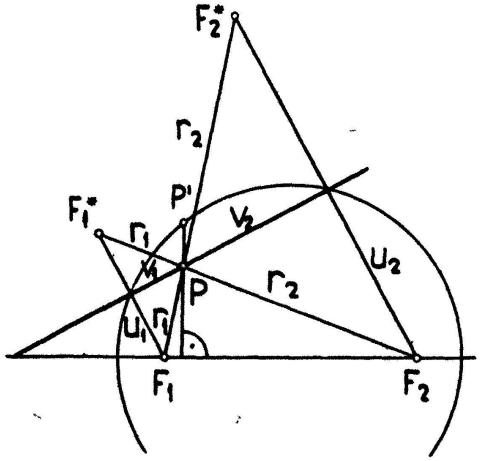

Fig. 10

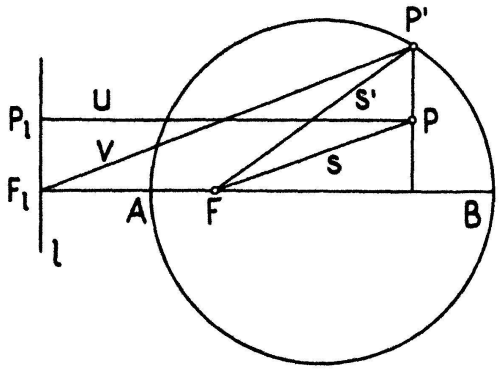

Fig. 11

Da hier das Affinitätsverhältnis $\lambda = b/a < 1$ ist, müssen wir, um Satz C vollständig zu beweisen, noch zeigen, daß das Affinitätsverhältnis λ keiner Beschränkung unterliegt, also auch > 1 sein kann. Das folgt aber aus der Verbindung von Satz 13 mit

Satz 14. Zwischen der Ellipse und dem Kreis über der kleinen Achse als Durchmesser besteht normale Affinität.

Das ergibt sich daraus, daß die Affinität in bezug auf die Hauptachse, welche vom Hauptkreis zur Ellipse führt, kombiniert mit einer Affinität in bezug auf die kleine Achse mit demselben Affinitätsverhältnis b/a eine Ähnlichkeitstransformation ergeben muß, die Ellipse also durch die zweite Affinität in den Kreis vom Radius b übergeführt wird. Damit ist C bewiesen.

Der Spezialfall $\lambda = 1$ (die Ellipse ein Kreis) entspricht, wie schon erwähnt, einem Grenzfall bei A und B.

Wünscht man den Satz C auf noch elementarerem Weg, ohne Benützung der harmonischen Eigenschaft von Pol und Polare in bezug auf den Kreis, zu beweisen, so führt, außer dem unter III angegebenen kurzen Beweis (siehe unten), auch der folgende Weg in einfacher Weise zum Ziel (Fig. 10):

Es sei F_i^* das Spiegelbild von F_i in bezug auf die Tangente t, u_i das Lot von F_i auf t, v_1, v_2 die Abschnitte auf der Tangente von P bis zum Hauptkreis, y und y' die Abstände der entsprechenden Punkte P und P' von der Hauptachse. Dann gilt

$$r_1 : r_2 = F_1F_1^*P : \triangle F_1F_2P = \triangle F_1F_2P : \triangle F_2F_2^*P$$

$$(y\,e)^2 = (u_1\,v_1)\,(u_2\,v_2)$$

$v_1\,v_2$ ist der absolute Betrag der Potenz von P in bezug auf den Hauptkreis, also

$$v_1\,v_2 = (y' - y)\,(y' + y)$$

und

$$u_1\,u_2 = b^2.$$

Hieraus $(ye)^2 = b^2\,(y'^2 - y^2)$, also y'/y konstant.

III. *Direkter Übergang von A zu C*

Da der Hauptkreis ein Apollonischer Kreis bezüglich der Strecke $\overline{FF_l}$ ist, so folgt in Verbindung mit Definition A, wenn die Strecken $\overline{PF}$, $\overline{P'F}$ mit s, s', und die Strecken $\overline{PP_l}$, $\overline{P'F_l}$ mit u, v bezeichnet werden (Fig. 11):

$$\varepsilon^2 = \frac{s'^2}{v^2} = \frac{s^2}{u^2} = \frac{s'^2 - s^2}{v^2 - u^2} = \frac{y'^2 - y^2}{y'^2}$$

und hieraus die Konstanz von y/y'. Hiebei bedeuten y und y' wieder die Abstände entsprechender Punkte von der Hauptachse.

C. Bindschedler, Küsnacht-Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche*

Die bekannte verschärfte isoperimetrische Ungleichung von T. Bonnesen[1]) für einen konvexen Bereich K heißt

$$L^2 - 4\,\pi\,F \geqq (L - 2\,\pi\,r)^2, \tag{1}$$

[1]) Vgl. hierüber weiteres in T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Verlag J. Springer, Berlin 1934 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 3) insbesondere S. 112/113.