

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1948)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Minimum von  $h(\varphi)$  entspricht<sup>1)</sup>), so muß es mehr als zwei stabile Ruhelagen geben. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ein einfaches Beispiel einer zweidimensionalen homogenen Wurffigur mit genau zwei stabilen Ruhelagen liefert eine Ellipse. Dasselbe gilt von Dreiecken, bei welchen eine der vom Schwerpunkt auf eine Dreiecksseite gefällten Normalen diese Seite nicht im Innern, sondern außerhalb oder in einem Eckpunkt trifft, so daß nur auf den beiden anderen Seiten ein stabiles Ruhnen möglich ist.

Natürlich kann man fragen, inwieweit in Satz 1 die Voraussetzung (V) entbehrlich ist. Auch ist anzunehmen, daß ein zu Satz 1 analoger Satz auch für  $n \geq 3$  Dimensionen gilt, wobei man in abgeplatteten Rotationsellipsoiden

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2 + \dots + x_n^2}{b^2} - 1 \leq 0 \quad (b > a)$$

Beispiele von «Würfeln» mit nur zwei stabilen Ruhelagen hat.

HEINRICH TIETZE, München.

## Kleine Mitteilungen

### I. Eine anschauliche Deutung des Vierscheitelsatzes

Die Randkurve eines ebenen konvexen Bereiches heißt Eilinie, wenn sie sowohl eine stetige Tangente als auch stetige und überall positive Krümmung besitzt. In der Differentialgeometrie der ebenen Kurven<sup>2)</sup> wird durch Rechnung bewiesen, daß es bei jeder Eilinie mindestens vier Scheitel gibt, das heißt vier Punkte, in denen die Krümmung ein relatives Extremum erreicht. Die Begriffe, die HJELMSLEV<sup>3)</sup> zur Untersuchung der ebenen Kurven einführte, gestatten eine geometrische Deutung des Vierscheitelsatzes.

Ein Bogen  $AB$ , bei dem die Richtung der Tangente sich von  $A$  bis  $B$  stetig und in gleichem Sinn um weniger als  $180^\circ$  ändert, heißt «einfacher Bogen». Das von den Halbtangenten in  $A$  und  $B$  und der Berührungssehne gebildete Dreieck umschließt somit den Bogen  $AB$ . Variiert zudem die Krümmung von  $A$  bis  $B$  stetig und monoton, sofern sie nicht konstant ist, so heißt der einfache Bogen  $AB$  «Normbogen». Durch die Scheitel wird die Eilinie in Normbögen geteilt. Man darf zum Beweis des Vierscheitelsatzes offenbar annehmen, daß keiner dieser Normbögen Kreisbögen enthält. Unter dieser Voraussetzung hat HJELMSLEV a. a. O. rein geometrisch gezeigt, daß die Evolute (Ort der Krümmungsmittelpunkte) eines Normbogens immer ein einfacher Bogen ist. Je zwei einfache Bögen der Evolute müssen sich infolge der Stetigkeitsvoraussetzungen so aneinanderschließen, daß zwei Halbtangenten aufeinanderfallen, das heißt, es entsteht eine Spitze «erster Art». Offenbar ist es unmöglich, auf diese Weise aus nur zwei einfachen Bögen eine geschlossene Evolute zusammenzusetzen. Da die Anzahl der Scheitel aber gerade sein muß, braucht es mindestens vier einfache Bögen, wie bei der Ellipse.

ERNST TROST.

<sup>1)</sup> Falls zum Wert  $\varphi = \psi$  der Minimalwert  $\varrho(\psi) = r$  gehört, dann gehört für ein passendes  $\delta > 0$  der ganze Kreissektor  $\varrho \leq r$ ,  $\psi - \delta \leq \varphi \leq \psi + \delta$  zu  $\mathfrak{R}$  und für jedes  $\varphi$  aus  $\psi - \delta \leq \varphi \leq \psi + \delta$  hat man an  $\mathfrak{R}$  eine Stützgerade  $x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$  mit  $h(\varphi) \geq r = h(\psi)$ . Man hat überdies notwendig ein eigentliches Minimum, d. h. es ist  $h(\varphi) > h(\psi)$  für  $0 < |\varphi - \psi| \leq \delta$ , da  $\varrho(\varphi)$  nach Voraussetzung in keinem Intervall konstant ist, somit für  $\varphi = \psi$  ein eigentliches Minimum hat. [Auf indifferente Ruhelagen, wie sie bei Konstanzintervallen von  $\varrho(\varphi)$  auftreten, komme ich zurück in einer Note *Über stabile und indifferente Ruhelagen eines homogenen Zylinders*, Sitz.-Ber. Bayr. Akad. Wiss., Sitzung 2. Juli 1948 (Zusatz bei der Korrektur).]

<sup>2)</sup> Vgl. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 3. Auflage, Bd. I, S. 31.

<sup>3)</sup> J. HJELMSLEV, *Darstellende Geometrie*, Kap. 7, Leipzig 1914.

II. *Démonstration du théorème de Coriolis au moyen des fonctions linéaires vectorielles*1. *Fonction linéaire vectorielle*

Soit un vecteur  $\mathbf{x}$  rapporté à deux systèmes de coordonnées rectangulaires d'origines confondues et portant respectivement les vecteurs unités  $\mathbf{e}_i$  et  $\bar{\mathbf{e}}_i$ . On a

$$\mathbf{x} = \sum \mathbf{e}_i x_i = \sum \bar{\mathbf{e}}_i \bar{x}_i.$$

Multiplions scalairement par  $\mathbf{e}_k$ :

$$(\mathbf{x} \mathbf{e}_k) = \dot{x}_k = \sum \bar{x}_i (\bar{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_k) = \sum \alpha_{ik} \bar{x}_i,$$

où

$$\alpha_{ik} = (\bar{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_k).$$

Considérons le vecteur  $\mathbf{y}$  qui, dans le système des  $\bar{\mathbf{e}}_i$ , a les composantes  $y_i = \bar{x}_i$ . On dit que  $\mathbf{x}$  est une fonction linéaire vectorielle de  $\mathbf{y}$ , ou, du moins, un cas particulier de fonction linéaire vectorielle. Nous exprimerons symboliquement la relation entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  par la notation  $\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{y})$ .

2. *Dérivation de la fonction linéaire vectorielle*

Supposons invariable le système des  $\mathbf{e}_i$  et fonctions d'un paramètre  $t$  le système des  $\bar{\mathbf{e}}_i$  et le vecteur  $\mathbf{y}$ . Calculons les dérivées:

$$\mathbf{x}' = \sum \mathbf{e}_k x'_k;$$

$$x'_k = \sum (\alpha_{ik} \bar{x}_i)' = \sum (\alpha'_{ik} \bar{x}_i + \alpha_{ik} \bar{x}'_i),$$

où

$$\alpha'_{ik} = (\bar{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}_k)' = (\mathbf{e}_k \mathbf{e}'_i).$$

Considérons les  $\alpha'_{ik}$  comme les coefficients d'une fonction linéaire vectorielle. On a

$$\mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{y}') + \alpha'(\mathbf{y}).$$

Formellement, on dérive une fonction linéaire vectorielle comme un produit.

3. *Origine mobile*

Supposons mobile l'origine du système des  $\bar{\mathbf{e}}_i$  et soit  $\mathbf{b}$  le vecteur qui en détermine la position et  $\mathbf{x}$  celui qui fixe celle du point mobile par rapport au système mobile.

On a

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{x}.$$

4. *Théorème des vitesses*

Dérivons la dernière équation:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b}' + \mathbf{x}' = \mathbf{b}' + \alpha(\mathbf{y}') + \alpha'(\mathbf{y}).$$

Cette équation a la signification suivante; la vitesse absolue  $\mathbf{r}'$  est égale à la somme de trois vitesses: la vitesse absolue  $\mathbf{b}'$  de l'origine mobile, la vitesse  $\alpha'(\mathbf{y})$  due à la rotation du système mobile, et la vitesse relative  $\alpha(\mathbf{y}')$ . La résultante des deux premières vitesses est appelée vitesse d'entraînement. La vitesse due à la rotation du système mobile peut être exprimé par un produit vectoriel,  $[\mathbf{w} \mathbf{y}]$  où  $\mathbf{w}$  est le vecteur vitesse angulaire du système d'axes mobiles.

5. *Accélérations, théorème de Coriolis*

Deux dérivations successives donnent

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{b}'' + \alpha''(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y}'') + 2\alpha'(\mathbf{y}').$$

Cette équation exprime le théorème de CORIOLIS: l'accélération absolue est égale à la somme des quatre accélérations suivantes:  $\mathbf{b}''$ , accélération de l'origine du système

mobile;  $\alpha''(\eta)$ , accélération due à la rotation du système mobile;  $\alpha(\eta'')$ , accélération relative et  $2\alpha'(\eta')$ , accélération complémentaire. L'accélération complémentaire est égale au double de la vitesse de l'extrémité du vecteur vitesse relative dans la rotation du système mobile, soit au produit vectoriel  $2[\omega \eta']$ . Les deux premières accélérations constituent l'accélération d'entraînement.

P. ROSSIER, Genève.

### III. Goniometrie und komplexe Zahlen

In Nummer 1 von Band 3 dieser Zeitschrift wird über einen Vortrag berichtet, in dem Herr M. Post, Lausanne, einen Lehrgang entwickelte, «der unter lediglicher Benutzung der Addition und der skalaren Multiplikation von Vektoren einfach und elegant die Trigonometrie sowie die ebene analytische Geometrie aufbaut». Als besonderer Vorzug dieser Methode wird unter anderem erwähnt, daß sich nach ihr die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus in voller Allgemeinheit in einem einzigen Gedankengang ergeben. Dies nun läßt sich auch ohne Vektorrechnung erreichen unter lediglicher Benutzung der ohnehin üblichen geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen.

Der gewöhnlich eingeschlagene Weg bei der Behandlung der Gaußschen Zahlenebene ist dieser: Zuvor wurden die genannten Additionstheoreme in der üblichen Weise mit mehr oder weniger sorgfältiger Durchführung der Fallunterscheidungen hergeleitet. Mit Hilfe der komplexen Zahlen und des Symbols  $\text{cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$  können sie in die «Cisgleichung»

$$\text{cis}(\varphi + \psi) = \text{cis} \varphi \cdot \text{cis} \psi$$

zusammengefaßt werden. Damit führt die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen zu der Erkenntnis: Die Multiplikation der komplexen Zahlen mit  $\text{cis } \varphi$  läßt sich geometrisch darstellen durch eine Drehung der Zahlenebene um den Nullpunkt um den Polarwinkel  $\varphi$ .

Dieser Weg nun läßt sich auch in umgekehrter Richtung durchlaufen. Man kann nämlich den zuletzt genannten Satz auch ohne Additionstheoreme in leicht faßlicher Weise herleiten. Aus ihm folgt die Cisgleichung, und diese liefert durch Ausrechnung die beiden Additionstheoreme in allgemeingültiger Form. Dieser Lehrgang hat sich mir seit vielen Jahren bewährt und sei im folgenden in Kürze entwickelt.

Die komplexen Zahlen werden zunächst in der Form  $X = x + i x'$  eingeführt, wo  $x$  und  $x'$  reelle Zahlen und  $i$  die imaginäre Einheit bedeuten, und es werden die Addition, Subtraktion und die Multiplikation solcher Summen nach den Regeln der Algebra mit Berücksichtigung von  $i^2 = -1$  geübt.  $X = Y$  bedeutet zugleich  $x = y$  und  $x' = y'$ .

Es schließt sich an die geometrische Darstellung der Zahlen  $X$  durch die Punkte einer Ebene mit den kartesischen Koordinaten  $(x; x')$ . Dann wird der Absolutwert  $|X|$  einer Zahl  $X$  definiert, rechnerisch als positive Quadratwurzel aus der Quadratsumme von  $x$  und  $x'$  und geometrisch als Abstand vom Nullpunkt. Analog deutet man  $|X - Y|$  als Abstand der repräsentierenden Punkte.

Nun beweist man durch Ausrechnung die grundlegende Identität:

$$|XY| = |X| \cdot |Y|.$$

Es folgt die Betrachtung der geometrischen Örter für  $U = uA$  ( $u$  reell,  $A$  komplex) und  $|U| = r$ . Dann zeigt man, daß sich die Punkte des Einheitskreises  $E = e + i e'$  durch eine einzige Größe, den Polarwinkel  $\varphi$ , eindeutig festlegen lassen, während umgekehrt  $\varphi$  eine periodische Funktion von  $E$  ist, mit der Periode  $2\pi$ .

Nun erfolgt der Anschluß an die Trigonometrie durch die allgemeine Definition von Kosinus und Sinus:  $\cos \varphi = e$  und  $\sin \varphi = e'$ , die für spitze  $\varphi$  mit der Definition am rechtwinkligen Dreieck übereinkommt. Zweckmäßig führt man das Symbol  $\text{cis } \varphi$  für  $E$  ein («Ciszahl»).

Jede komplexe Zahl  $A$  läßt sich nun in der Form  $|A| \text{cis } \alpha$  darstellen. Die Polarkoordinaten  $|A|$  und  $\alpha$  bestimmen eindeutig die kartesischen Koordinaten  $a$  und  $a'$ , während durch  $a$  und  $a'$   $|A|$  eindeutig,  $\alpha$  aber nur bis auf ganze Vielfache von  $2\pi$  bestimmt ist.

Jetzt ist man in der Lage, die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit  $\text{cis } \varphi$  zu untersuchen. Zunächst stellt man fest:

$$|X \text{ cis } \varphi - Y \text{ cis } \varphi| = |(X - Y) \text{ cis } \varphi| = |X - Y| \cdot |\text{cis } \varphi| = |X - Y|,$$

d.h. bei Multiplikation mit  $\text{cis } \varphi$  bleiben sämtliche Abstände unverändert.

Und nun kommen die entscheidenden Überlegungen. Zuerst spezialisiert man  $\varphi$  auf  $\pi/2$ , untersucht also die Multiplikation mit  $i$  und stellt fest:  $0 \cdot i = 0$ ,  $1 \cdot i = i$  und  $i \cdot i = -1$ . Die Multiplikation mit  $i$  führt also das Dreieck  $0, 1, i$  in das kongruente Dreieck  $0, i, -1$  über, welches aus jenem durch eine Drehung im positiven Sinne um  $90^\circ$  um den Nullpunkt hervorgeht.

Da nun ein Punkt durch seine Abstände von drei gegebenen, nicht auf derselben Geraden liegenden Punkten eindeutig bestimmt ist und da diese Abstände unverändert bleiben, so ergibt sich, daß die ganze Ebene um einen rechten Winkel um den Nullpunkt gedreht wird.

Jetzt wählt man  $\varphi$  wieder allgemein und stellt fest, im letzten Teil mit Hilfe des eben gefundenen:  $0 \cdot \text{cis } \varphi = 0$ ,  $1 \cdot \text{cis } \varphi = \text{cis } \varphi$  und  $i \cdot \text{cis } \varphi = \text{cis } [\varphi + (\pi/2)]$ . Das heißt das Dreieck  $0, 1, i$ , und mit ihm die ganze Ebene, wird um den Nullpunkt um den Polarwinkel  $\varphi$  gedreht.

Damit ist das entscheidende Resultat gefunden, aus ihm ergibt sich die Cisgleichung. Der Baum der Erkenntnis ist gereift, man braucht nur leicht zu schütteln, und die schönsten Früchte fallen. Ich erwähne lediglich: Additionstheoreme, Potenzierung und Radizierung komplexer Zahlen, Einheitswurzeln.

Ich habe im Vorstehenden die wichtigsten Schritte angedeutet. Es ist Sache des erfahrenen Lehrers, in wohlbedachter Rücksicht auf den besonderen Charakter der Schule und der Klasse zu entscheiden, wie im einzelnen die notwendigen Schritte zu erarbeiten sind und wie weit Nebenwege beschritten und Erweiterungen ausgebaut werden sollen.

Daß die Additionstheoreme so schön fix und fertig herausspringen, ist gewiß ein schätzenswerter Vorzug der geschilderten Methode. Noch bedeutsamer erscheint mir der Umstand, daß hier die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen zum tragenden Element wird, während sie sonst ein zwar schönes, aber doch nur begleitendes Spiel bleibt.

A. STOLL, Zürich.

## Aufgaben

*Aufgabe 31.* Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $s$  wird ein geschlossener Faden der Länge  $L \geq 3s$  gelegt und durch einen sich bewegenden Stift gespannt. Man berechne die Fläche des vom Stifte beschriebenen Ovals.

E. TROST.

*Lösung.*  $F$  bedeute nicht den Flächeninhalt des Ovals, sondern die Differenz zwischen der Ovalfläche und der Dreiecksfläche. Sind dann  $\varphi$  und  $\psi$  beide zwischen  $0$  und  $\pi/2$  bestimmt durch

$$\sin \varphi = \frac{L - 3s}{2L - 3s} \quad \text{und} \quad \sin \psi = \frac{L}{2L - 3s},$$

dann ist

$$F = \frac{3}{4} \sqrt{(L - s)(L - 2s)} \{ \varphi \sqrt{L(L - s)} + \psi \sqrt{(L - 2s)(L - 3s)} \}.$$

*Herleitung.*  $A, B, C$  seien die Ecken des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite  $s$ , und  $A'$  sei die Mitte von  $BC$ ,  $B'$  diejenige von  $CA$ . Die Verlängerungen der Höhen  $AA'$  und  $BB'$  über  $A'$  bzw.  $B'$  hinaus schneiden aus der ringförmigen Fläche  $F$  genau  $1/6$  heraus. Der krummlinige Teil der Berandung dieses Flächenstückes besteht aus zwei mit gleicher Tangente aneinanderstoßenden Ellipsenbögen  $RS$  und  $ST$ , wobei  $R, S, T$  bzw. auf den Verlängerungen von  $A'A$ ,  $BA$  und  $BB'$  liegen. Der Rest der Berandung besteht aus den Strecken  $RA$ ,  $AB'$  und  $B'T$ .