**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 3 (1948)

**Heft:** 5

**Artikel:** Über die Funktionentheorie in einer hyperkomplexen Algebra

**Autor:** Fueter, Rudolf

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-13579

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*
*Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band III Nr. 5 Seiten 89–104 Basel, 15. September 1948

# Über die Funktionentheorie in einer hyperkomplexen Algebra

RIEMANN schreibt in seinen fundamentalen *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe*: «Die Einführung der complexen Größen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Größenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Größen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor.» «...beinahe jeder Schritt, der hier gethan ist, hat nicht bloß den ohne Hilfe der complexen Größen gewonnenen Resultaten eine einfachere, geschlossenere Gestalt gegeben, sondern auch zu neuen Entdeckungen die Bahn gebrochen[1].» Die Funktionentheorie hyperkomplexer Größen ist die konsequente Weiterbildung dieser Gedanken. Sie ist keine formale Verallgemeinerung, sondern führt zu neuen Einsichten. Dies möchte ich im folgenden ausführen.

Legen wir statt der komplexen Größen eine assoziative Algebra mit den unabhängigen Einheiten $e_0, e_1, e_2, \ldots$ zugrunde und bilden wir in ihr das Linearsystem $\mathfrak{L}: z = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, wo die $x_k$ reelle Variablen sind, so können wir $z$ als hyperkomplexe Variable in dem $n$-dimensionalen euklidischen Raume $R$ auffassen. Sind ferner in $R$ $n$ reelle stetige und stetig partiell differenzierbare Funktionen $u_h(x)$, $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, der $n$ reellen Variablen $x$ gegeben, so können wir diese in

$$w = \sum_{h=0}^{n-1} u_h(x)\, e_h$$

als *hyperkomplexe Funktion in R* zusammenfassen[2]). Dies hat den Vorteil, daß wir z. B. die $n$ reellen Gleichungen $u_h(x) = 0$ durch die eine $w = 0$ ersetzen können, da wegen der Unabhängigkeit der $e_k$ auch aus $z = 0$ das Verschwinden jedes $x_k$ folgt. Wir schreiben $w = f(z)$.

Wollen wir jetzt eine Funktionentheorie von $w = f(z)$ entwickeln, so ist klar, daß wir eine geeignete Auswahl aller $w$ treffen müssen. Für den Fall der komplexen Funktionen ist dies von RIEMANN so durchgeführt worden, daß die Existenz des Differentialquotienten in jedem Punkt des Funktionsbereiches, d. h. die Eindeutigkeit des Grenzwertes des Differenzenquotienten verlangt wurde. Alle Versuche einer Verallgemeine-

[1]) *Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke*, 2. Aufl., Leipzig 1892, S. 37 ff. Siehe auch GAUSS' Brief an BESSEL, *C. F. Gauß' Werke*, Bd. 8, S. 90, Göttingen 1900.

[2]) Zuweilen ist es nützlich, für $w$ ein anderes hyperkomplexes System zu wählen.

rung dieses Ansatzes auf weitere hyperkomplexe Funktionen hatten einen negativen Erfolg[1]). *Der Riemannsche Ansatz läßt sich nicht verallgemeinern.*

Der von mir vorgeschlagene Ansatz geht prinzipiell von einem andern Gesichtspunkt aus; *er verlangt, daß das Analogon zum ersten Cauchyschen Integralsatz für die hyperkomplexen Funktionen $w = f(z)$ wieder gilt.* Diese Forderung ist um so verständlicher, als wegen des Satzes von MORERA bekanntlich der erste Cauchysche Satz auch hinreichend für die analytischen Funktionen einer komplexen Variablen ist. Sie ist übrigens virtuell schon bei CAUCHY vorhanden[2]). Funktionen, die der ausgesprochenen Bedingung genügen, heißen wieder *analytisch oder regulär.* Sie bilden diejenige Auswahl aller Funktionen $w = f(z)$, für die die Funktionentheorie durchgeführt werden kann.

Wie werden nun diese regulären Funktionen gefunden? Dazu dient der *Gaußsche Integralsatz* in $n$ Dimensionen. Es sei $R$ ein endlicher $n$-dimensionaler Raum, der durch die zweiseitige geschlossene $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche $H$ begrenzt sei. $H$ durchdringe sich nirgends und besitze in jedem Punkt eine nach innen gerichtete Normale mit den Richtungskosinus $\xi_h$, $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. $H$ kann auch aus mehreren Teilflächen bestehen. Sind jetzt $P_{hk}$, $h = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, reelle, stetige und stetig partiell differenzierbare Funktionen der $n$ reellen Variablen $x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, in dem abgeschlossenen Raume $R$, ist $dr$ das Raumelement von $R$, $dh$ das Element von $H$, und kürzt man

$$\frac{\partial P_{hk}}{\partial x_k} \quad \text{mit} \quad P_{hk}^{(k)}$$

ab, so lautet der genannte Integralsatz für $h = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\int\limits_{(R)} \sum_{k=0}^{n-1} P_{hk}^{(k)}\, dr = -\int\limits_{(H)} \sum_{k=0}^{n-1} P_{hk}\, \xi_k\, dh.$$

Mit dem Beweise dieses Satzes werden die topologischen Schwierigkeiten, die auftreten können, erledigt.

Um diesen Satz auf unser Problem anzuwenden, nehmen wir zunächst *$n$ fest gegebene* beliebige hyperkomplexe Funktionen der Algebra:

$$a_k = \sum_{(h)} a_{hk}(x)\, e_h. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Die reellen Funktionen $a_{hk}(x)$ genügen in $R$ den über die $u_h(x)$ gemachten Voraussetzungen und können auch konstant sein. Sind jetzt $w = f(z)$ und $v = g(z)$ zwei hyperkomplexe Funktionen in $R$, deren Funktionentheorie wir entwickeln wollen, so multiplizieren wir $w\, a_k\, v$ in unserer Algebra aus:

$$w\, a_k\, v = \sum_{(h)} P_{hk}\, e_h, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

wodurch die Komponenten $P_{hk}$ als stetige und stetig differenzierbare Funktionen in $R$ gegeben werden. $w\, a_k\, v$ liegt im allgemeinen nicht mehr in $\mathfrak{L}$, sondern in der

[1]) Siehe etwa SCHEFFERS, Berichte kgl. sächs., Ges. Wiss., Bd. 45, S. 828, und Bd. 46, S. 120.

[2]) A.-L. CAUCHY, *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, Bull. Soc. Math. (Darboux), Paris 1874, Bd. VII, S. 265, speziell S. 269. Siehe außerdem P. STÄCKEL, *Integration durch imaginäres Gebiet*, Bibliotheca Math., 3. Folge, 1. Bd. Leipzig 1900, S. 109.

gegebenen Algebra. Diese $P_{hk}$ setzen wir in dem Gaußschen Satze ein, multiplizieren mit $e_h$ und addieren über alle $h$. Dann folgt wegen $(w\, a_k\, v)^{(k)} = \sum_{(h)} P_{hk}^{(k)} e_h$:

$$\int\limits_{(R)} \sum_{k=0}^{n-1} (w\, a_k\, v)^{(k)} dr = - \int\limits_{(H)} w \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \xi_k \right) v\, dh.$$

Wir nennen:

$$dZ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \xi_k\, dh$$

das hyperkomplexe Element von $H$. Es ist von $w$ und $v$ unabhängig. Wollen wir jetzt die Unabhängigkeit des Integrals von $H$ verlangen, so muß:

$$\int\limits_{(H)} w\, dZ\, v = 0 \tag{I}$$

sein, was offenbar die Bedingung hervorruft:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (w\, a_k\, v)^{(k)} = 0. \tag{II}$$

Hat man ein Funktionspaar $w$, $v$ gefunden, das der Gleichung (II) genügt, so kann man nach allen $w$ fragen, die zu einem festen $v$ gehören. Wir setzen:

$$a_k = b_k\, c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad dZ = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, c_k\, \xi_k\, dh,$$

wo $b_k$, $c_k$ beliebige feste Größen der Algebra sind und die $c_k$ auch reell (*skalare* Multiplikation) sein können. Man kann dann über die $c_k$ so verfügen, daß bei festem $v$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, (c_k\, v)^{(k)} = 0. \tag{III}$$

Dann folgt aus (II) für die gesuchten $w$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (w\, b_k)^{(k)}\, c_k = 0. \tag{IV}$$

Man darf sich also auf alle Funktionen $w$, $v$ beschränken, die den Gleichungen (III) und (IV) genügen. $w$ heißt *rechts-*, $v$ *linksregulär*. Die Bedingungsgleichungen sind Systeme von wenigstens $n$ reellen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung. Damit hat man den wichtigen Zusammenhang mit der Theorie der Differentialgleichungen gefunden. Genügt $w$ beiden Gleichungen (III) und (IV), so heißt es *zweiseitig* regulär. Die rechts- sowie die linksregulären Funktionen bilden im Bereiche aller reellen Zahlen einen *Modul*, dagegen im allgemeinen keinen *Ring*.

Es würde zu weit führen, wenn gezeigt würde, daß man durch geeignete Koordinatentransformationen die noch willkürlichen $b_k$ und $c_k$ speziell so wählen darf, daß:

$$b_k = e_k, \quad c_k = 1, \quad a_k = e_k$$

wird. Voraussetzung dabei ist, daß die Determinante der $n^2$ Komponenten der $a_k$ in $R$ von Null verschieden ist. Jetzt lauten die beiden Bedingungsgleichungen so:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^{(k)}\, e_k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} e_k\, v^{(k)} = 0; \tag{V}$$

und im Hauptsatze I darf man $dZ = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k e_k dh$ setzen. Wir wollen alle die Konsequenzen, die (V) erzeugt, nicht im allgemeinen Falle betrachten, insbesondere auch nicht die Frage, wieweit ein Analogon zum zweiten Cauchyschen Satze gefunden werden kann, sondern nun an denjenigen Fällen die Theorie verfolgen, die bisher weitgehendst ausgebaut worden sind.

1. Fall: *Die zugrunde gelegte Algebra sei diejenige der komplexen Zahlen.* Sie ist kommutativ, also fallen rechts- und linksregulär zusammen. Man setzt $e_0 = 1$, $e_1 = i$ (imaginäre Einheit) und die Gleichung (V) lautet:

$$w^{(0)} + i\, w^{(1)} = 0.$$

Im Reellen ergeben sich für $w = u_0 + i\, u_1$ die Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_0}.$$

2. Fall: *Die Algebra sei diejenige der Quaternionen.* Wir setzen nach HURWITZ die Quaternioneneinheiten gleich $i_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, also $e_0 = i_0 = 1$, $e_k = i_k$; sie genügen der bekannten Multiplikationstafel. Die Gleichungen (V) lauten dann:

$$\sum_{k=0}^{3} w^{(k)}\, i_k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{3} i_k\, v^{(k)} = 0. \tag{VI}$$

Die erste ergibt im Reellen die vier linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen:

$$w = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_0} = 0.$$

Für die den Gleichungen (VI) genügenden Funktionen $w$, $v$ gilt somit der *1. Hauptsatz,* der dem I. Cauchyschen Satze entspricht:

$$\int_{(H)} w\, dZ\, v = 0.$$

Es ist bemerkenswert, daß aber auch der dem zweiten Cauchyschen Satze entsprechende II. Hauptsatz gilt;

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{(H)} f(\zeta)\, dZ\, n\,(\zeta - z)^{-1} (\zeta - z)^{-1},$$

wobei $z$ irgendein Punkt im Innern von $H$ ist, $\zeta$ die Integrationsvariable und $n\,(\zeta - z)$ die Norm von $\zeta - z$ bedeutet. Aus dem II. Hauptsatze kann man die Reihenentwicklung der rechtsregulären Funktionen herleiten, die auch umgekehrt bei Konvergenz stets rechtsreguläre Funktionen darstellen. Dagegen führt die Betrachtung der Singularitäten auf ganz neue und wichtige Entwicklungen. Neben den punktförmigen isolierten Singularitäten treten nämlich jetzt auch solche auf, die eine zweidimensionale Punktmenge bilden. Das Analogon zur Laurentschen Reihe führt somit, wie W. NEF gezeigt hat, auf Reihen nach Stieltjèsschen Integralen über solche Mengen. Damit erhalten letztere das Bürgerrecht in der Funktionentheorie und hätten hier entdeckt werden müssen, wenn sie nicht schon längst gefunden worden wären.

Alle Komponenten der regulären Funktionen sind Potentialfunktionen von vier reellen Variablen. Der II. Hauptsatz führt daher sehr einfach, im Falle $H$ eine Hyperkugel ist, auf das Poissonsche Integral.

Zu neuen Erkenntnissen führt die Tatsache, daß die analytischen Funktionen zweier komplexer Variablen (ebenso wie diejenigen einer komplexen Variablen) unter den rechtsregulären Funktionen auftreten. Setzt man nämlich:

$$z = \sum_{k=0}^{3} x_k i_k = z_1 + z_2 i_2,$$

wo $z_1 = x_0 + i_1 x_1, \quad z_2 = x_2 + i_1 x_3$ ist, so ist $w = w_1 + i_2 w_2$

rechtsregulär, falls $w_1 = u_0 + i_1 u_1$, und $w_2 = u_2 + i_1 u_3$ zwei analytische Funktionen der beiden komplexen Variablen $z_1$, $z_2$ sind. Man hat hier von vornherein *zwei* analytische Funktionen der beiden Variablen zusammengekoppelt, indem man die weitere Einheit $i_2$ einführt. Dies ist bedeutsam, weil dadurch erst sich funktionentheoretisch ein vernünftiges Problem ergibt, indem erst jetzt ein Umkehrproblem vorhanden ist. Man erhält so eine wichtige Vereinfachung, indem man statt *zwei* analytischen Funktionen zweier komplexer Variablen *eine «reguläre analytische Quaternionenfunktion»* bekommt.

Diese Vereinfachung kommt noch stärker zum Ausdruck, wenn $w_1$, $w_2$ *Abelsche Funktionen* von $z_1$, $z_2$ mit den vier Periodenpaaren $\omega_k'$, $\omega_k''$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ sind. Denn statt $z_1$ um $\omega_k'$ und zugleich $z_2$ um $\omega_k''$ zu vermehren, wird jetzt offenbar die Quaternionenvariable $z$ um

$$\omega_k = \omega_k' + \omega_k'' i_2, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

vermehrt. So entsteht eine analytische reguläre Quaternionenfunktion von $z$ mit den vier Perioden $\omega_k$. Die allgemeine Theorie gestattet aber *alle* vierfachperiodischen Funktionen aufzustellen. Unter diesen finden sich somit auch alle Abelschen Funktionen. Die Vereinfachung, statt vier Periodenpaaren vier Perioden zu haben, ist evident.

Die Funktionentheorie der analytischen Funktionen zweier komplexen Variablen wird auf diese Weise in einen höhern Funktionenraum eingebettet. Man übersieht sie jetzt von einem höheren Standpunkt aus. Damit finden ihre vielen scheinbaren Anomalien ihre Erklärung. Wohl das schlagendste Beispiel hierfür ist der wichtige Hartoggssche Satz, daß eine analytische Funktion zweier komplexer Variablen, die auf einer im Endlichen liegenden, geschlossenen, zweiseitigen, sich nirgends durchdringenden Hyperfläche regulär ist, auch im ganzen Innern regulär ist. Der analoge Satz für analytische Funktionen einer Variablen gilt bekanntlich *nicht*. Der Beweis des Satzes mittels der Theorie der rechtsregulären Funktionen ist außerordentlich einfach und deckt zugleich den Grund seines Bestehens auf; er zeigt, welche besonderen Eigenschaften eine rechtsreguläre Funktion haben muß, damit er gilt, und warum er bei analytischen Funktionen einer komplexen Variablen in einer Ebene *nicht* allgemein gelten kann.

Die geometrische Seite des durch rechtsreguläre Funktionen vermittelten Abbildungsproblems (das im 1. Falle auf die konforme Abbildung führt) ist von H. G. HAEFELI abgeklärt worden. Es zeigt sich, daß die durch die rechtsregulären Funktionen erzeugte Abbildung eines Hyperraumes in einen andern auf die additive Zusammensetzung von je drei konformen Abbildungen, die Spiegelungen mit Schiebungen sind, herauskommt. Die additive Zusammensetzung ist nur in trivialen Fällen wieder konform.

Nimmt man in der oben berührten Theorie der vierfachperiodischen rechtsregulären Funktionen die vier Perioden als Basis einer Brandtschen Quaternionenalgebra, legt ihnen also *zahlentheoretische* Bedingungen zu, so kommt man zu ganz neuen Problemen und Theorien, die eine Verallgemeinerung der *komplexen Multiplikation* der *elliptischen Funktionen* darstellen.

3. Fall: *Die zugrundegelegte Algebra ist eine Cliffordsche.* Es würde zu weit führen, wenn wir auch diesen Fall ausführten. Es sei einzig hervorgehoben, daß unter diesen Fall auch die Funktionentheorie der analytischen Funktionen von $n$ komplexen Variablen fällt. Der Hartoggssche Satz kann auch in diesem Falle einfach bewiesen werden. Als Anwendung der allgemeinen Theorie gelang W. NEF der Beweis des Analogons zum Fatouschen Satze für reelle Potentialfunktionen von $n$ reellen Variablen sowie die Lösung ihrer Randwertaufgaben.

4. Fall: Man nimmt für $z$ und $w$ verschiedene Algebren, und zwar diejenigen, die von den Physikern zur Herleitung der Diracschen Gleichungen in der Atomphysik aufgestellt wurden. Man erhält so die Funktionentheorie der Diracschen Gleichungen mit verschwindender Ruhmasse. A. KRISZTEN hat diese Theorie verallgemeinert und für nichtverschwindende Ruhmassen durchgeführt. So konnte er in diesem allgemeinen Falle nicht nur die Lösungsfunktionen angeben, sondern auch das Randwertproblem lösen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß für eine große Zahl von partiellen linearen Differentialgleichungen oder Systemen von solchen, die Funktionentheorie entwikkelt und die Lösungen gefunden werden können. Es gilt nur, die für die Differentialgleichungen passende Algebra zu finden. In ihr können dann die zu Beginn ausgesprochenen Prinzipien ihre Anwendung finden.

Ich glaube, daß diese Beispiele die außerordentliche Fruchtbarkeit der Funktionentheorie im Hyperkomplexen zeigen. Letztere bringt nicht nur eine vereinfachte Darstellung, sondern erweitert den Gesichtskreis, indem sie bisher bekannte Theorien von höherm Standpunkte aus betrachten läßt und vor allem zu ganz neuen Problemen führt. Sie durchbricht die bisherige Schranke, die zwang, bei den komplexen Zahlen stehen zu bleiben, und bringt damit, wie mir scheint, eine große Bereicherung der Forschung. Allerdings muß betont werden, daß die ganze Entwicklung erst in ihren Anfängen steht.

Die Literatur über das Gebiet ist am Schluß der Arbeit von H. G. HAEFELI, *Hyperkomplexe Differentiale,* Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 20, fasc. 4, S. 419/420, zusammengestellt.

RUDOLF FUETER, Zürich.