Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

I. *Eine analytische Begründung der Tangensfunktion*

In den «Kleinen Mitteilungen» des Bd. II, Nr. 4, der «Elemente» leitete Herr M. ALTWEGG die Eigenschaften der Winkelfunktionen aus ihrer Differentialgleichung ab. Er bediente sich dabei gewisser allgemeiner Sätze der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Im folgenden soll dasselbe Resultat, ausgehend vom Integral des *arcus tangens* erreicht werden. Diese Herleitung verwendet nur sehr einfache Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung.

I. *Die Hilfsfunktion A.* Wir setzen die Funktion an:

$$y = A(x) \equiv \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Sie ist eindeutig und stetig für alle x und wegen

$$y' = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

mit x monoton wachsend. Sie ist weiter eine ungerade Funktion, denn die Substitution $t = -u$ im Integral liefert sofort:

$$A(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = -\int_0^{x} \frac{du}{1+u^2} = -A(x). \tag{1}$$

Um den Wertebereich der y zu erhalten, bemerken wir, daß das Integral für $x \to \infty$ gegen einen bestimmten Wert konvergiert, den wir mit $\alpha/2$ bezeichnen wollen:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Wegen (1) hat man weiter:

$$\int_0^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\alpha}{2},$$

und da y monoton wächst, gilt

$$-\frac{\alpha}{2} < y < \frac{\alpha}{2}.$$

Die Zahl α stimmt mit π überein. Denn definieren wir letztere Größe als den halben Umfang des Einheitskreises, d.h. durch die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so erhält man durch Ausführen der Substitution $x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ in diesem Integral:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha}{2}.$$

II. *Die Funktion T.* Die in I. charakterisierte Hilfsfunktion $y = A(x)$ hat nach bekannten Sätzen eine eindeutige und stetige inverse Funktion

$$x = T(y),$$

definiert im Intervall $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, mit Polen an den Enden des Intervalls und einer Nullstelle bei $y = 0$. Aus (1) folgt weiter, daß T ungerade ist. Durch die Relationen

$$T(y \pm \pi) = T(y)$$

setzen wir sie auf der y-Achse fort. T wird dadurch zu einer periodischen Funktion mit der Periode π.

III. *Das Additionstheorem.* Sei $x_1 = T(y_1)$, $x_2 = T(y_2)$; wir fragen nach dem Werte

$$x = T(y_1 + y_2).$$

Nach Definition ist

$$y_1 = A(x_1), \quad y_2 = A(x_2), \quad y_1 + y_2 = A(x),$$

so daß wir zur Bestimmung von x die Gleichung erhalten:

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2}$$

oder auch, wenn wir den zweiten Summanden links auf die andere Seite bringen:

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{x_2}^{x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Nun führen wir im Integral rechts die Substitution

$$t = \frac{u + x_2}{1 - u\,x_2}$$

aus. Wie eine leichte Rechnung zeigt, ergibt dies

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{x - x_2}{1 + x\,x_2}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Da die Funktion $A(x)$ stetig und monoton ist, folgt daraus:

$$x_1 = \frac{x - x_2}{1 + x\,x_2}, \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}.$$

Auf die inverse Funktion angewendet, besagt dieses Resultat:

$$T(y_1 + y_2) = \frac{T(y_1) + T(y_2)}{1 - T(y_1)\,T(y_2)}. \tag{2}$$

IV. *Die Ableitung von T.* Für diese ergibt sich leicht:

$$T'(y) = \frac{1}{A'(x)} = 1 + x^2 = 1 + T(y)^2. \tag{3}$$

V. *Ergebnis.* Die Funktion $T(y)$ ist nach II. eine eindeutige, stetige, ungerade und periodische Funktion mit der Periode π. Sie besitzt das Additionstheorem (2) und die Ableitung (3).

Dies sind aber gerade die Eigenschaften der Funktion $\operatorname{tg} x$; sie genügen, um die weiteren Definitionen und grundlegenden Sätze der trigonometrischen Funktionen elementar herzuleiten.

Man kann schließlich mit derselben Methode zeigen, daß T mit der durch geometrische Definition (Länge einer Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck der Hypotenuse 1) gewonnenen Funktion $\operatorname{tg} x$ zusammenfällt. P. WILKER, Bern.

II. *Über das Verhalten des Krümmungsradius bei Affinität*

Obwohl das Zeichnen einer ebenen Kurve, insbesondere eines Kegelschnitts, durch den Krümmungskreis nur in einem Scheitel erleichtert wird, finden Konstruktionen des Krümmungsradius für einen allgemeinen Punkt immer wieder Interesse[1]. Es soll daher hier auf eine heute wenig bekannte, allgemeine Formel hingewiesen werden, aus der sich viele Konstruktionen sehr einfach ergeben.

Wir betrachten zwei affine Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$. n sei das Affinitätsverhältnis. Ist t, t' ein Paar entsprechender Tangenten, ϱ bzw. ϱ' der Krümmungsradius im Berührungspunkt P bzw. P', λ das (konstante) Verhältnis zweier entsprechender Strecken auf t bzw. t', so gilt

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\lambda^3}{n}. \tag{1}$$

Ist die Affinität speziell eine *Scherung*[2] in Richtung der Tangente t, also $\lambda = n = 1$, so erhält man $\varrho' = \varrho$.

Mit $\lambda = 1$, $n = b/a$ folgt aus (1) für den Ellipsenscheitel sofort $\varrho' = a^2/b = a^3/a\,b$ und daraus durch Scherung in Richtung der großen Achse

$$\varrho_1 = \frac{a_1^3}{a_1\,b_1 \sin\omega} = \frac{a_1^3}{a\,b} \tag{2}$$

als allgemeine Formel für den Krümmungsradius im Endpunkt des Durchmessers $2\,b_1$, wenn $2\,a_1$ der konjugierte Durchmesser und ω der Schnittwinkel ist[3]. Nach (2) läßt sich ϱ_1 genau wie der Krümmungsradius im Scheitel konstruieren, indem man das Rechteck mit den Seiten a_1 und $b_1 \sin\omega$ bildet[4]. Damit ist zugleich eine Konstruktion von ϱ' aus ϱ gegeben, denn der Krümmungskreis in P' ist identisch mit dem Krümmungskreis der Ellipse, die durch die Affinität aus dem Krümmungskreis in P hervorgeht.

Da aus einem Parabelsegment mit zur Achse senkrechter Sehne s durch Scherung parallel zu s das allgemeine Segment entsteht, gilt für den Krümmungsradius im Scheitel S des Segments folgende einfache Konstruktion: Es sei N der Schnittpunkt der Normalen in S mit der Sehne. Man trägt auf der Normalen nach außen die Strecke $SM = SN$, auf der Sehne die Strecke $NT = 0{,}5\,s$ ab und errichtet auf MT in T die Senkrechte, die die Normale in K schneidet. Dann ist $\varrho' = NK$.

Wir geben für (1) zwei anschauliche und zwei analytische Beweise.

1. Der Umkreis eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c und der Fläche F hat den Radius $r = a\,b\,c/(4\,F)$. Ist also QPR ein $\mathfrak{C}$ eingeschriebenes Dreieck und $Q'P'R'$ das affine, $\mathfrak{C}'$ eingeschriebene Dreieck, so gilt

$$\frac{r'}{r} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{c'}{c} \cdot \frac{1}{n}.$$

Fallen Q und R mit P zusammen, so wird $a'/a = b'/b = c'/c = \lambda$, und man erhält (1)[5].

[1] Diese Mitteilung wurde durch einen Brief von Herrn R. NÜSCHELER vom 18. Januar 1948 veranlaßt, in welchem der Ausdruck (2) mittels Differentialrechnung hergeleitet wird.

[2] Die Affinitätsstrahlen sind parallel zur Affinitätsachse.

[3] Die Formel (2) zeigt, daß ϱ in den Scheiteln extreme Werte annimmt.

[4] Diese Konstruktion hat schon DUPIN angegeben (Développements de géométrie [1813]).

[5] Dieser Beweis findet sich in T. SCHMID, Darstellende Geometrie I, S. 94 (Leipzig 1922). Eine äquivalente Aussage machte schon 1836 MAC-CULLAGH. Vgl. ROUCHÉ et COMBEROUSSE, Traité de géométrie II, S. 439 (1912). Eine zu (1) analoge Formel gilt auch für die Krümmung einer Raumkurve und ihrer Parallelprojektion. Vgl. SCHMID, l. c., S. 170.

2. Ist P_1 ein Nachbarpunkt von P, t_1 die Tangente in P_1, S der Schnittpunkt von t und t_1, $d\tau$ der Schnittwinkel (Kontingenzwinkel), so gilt für die Flächen der Dreiecke PP_1S bzw. $P'P_1'S'$

$$\frac{\triangle P'P_1'S'}{\triangle PP_1S} = \frac{P'S' \cdot P_1'S' \cdot \sin d\tau'}{PS \cdot P_1S \cdot \sin d\tau} = n. \tag{3}$$

Ist das Bogenelement $ds = PP_1$ genügend klein, so ist bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$P_1S = PS, \qquad ds = 2\,PS \cdot \cos\frac{1}{2}\,d\tau, \qquad \sin d\tau = d\tau,$$

also ergibt sich mit (3)

$$\varrho' : \varrho = \frac{ds'}{d\tau'} : \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\overline{P'S'}^3 \cdot \cos(1/2)\,d\tau'}{\overline{PS}^3 \cdot \cos(1/2)\,d\tau} = \frac{\lambda^3}{n} \cdot \frac{\cos(1/2)\,d\tau'}{\cos(1/2)\,d\tau},$$

was beim Grenzübergang (1) liefert.

3. Offenbar genügt es, (2) zu beweisen, denn bei affiner Abbildung des Krümmungskreises in P in die Ellipse mit den konjugierten Halbmessern a_1, b_1 ist $a_1 = \lambda\,\varrho$, $a_1 b_1 \sin\omega = n\,\varrho^2$, so daß (2) in (1) übergeht. Im schiefwinkligen Koordinatensystem mit dem Achsenwinkel ω lautet die Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{2\,a_1^2}{b_1}\,x - \frac{a_1^2}{b_1^2}\,x^2.$$

Der die Ellipse im Ursprung berührende Kreis vom Radius r hat die Gleichung

$$y^2 = 2\,x\,r \sin\omega - 2\,x\,y\cos\omega - x^2.$$

Man erhält im Ursprung eine dreipunktige Berührung, wenn

$$r \sin\omega = \frac{a_1^2}{b_1}\ ^{1)}.$$

4. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung von $\mathfrak{C}$ für ein Koordinatensystem, dessen x-Achse zur Tangente im betrachteten Punkt P parallel ist. Sieht man von Translationen ab, so wird eine affine Abbildung durch die Transformation

$$\begin{aligned} x &= \alpha\,x_1 + \beta\,y_1 \\ y &= \gamma\,x_1 + \delta\,y_1 \end{aligned} \qquad \Delta = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$$

vermittelt. Das Affinitätsverhältnis ist $n = \Delta^{-1}$, wie man durch Berechnen einer Dreiecksfläche erkennt. Mit der Kettenregel erhält man

$$y_1' = \frac{\alpha\,y' - \gamma}{\delta - \beta\,y'}, \qquad y_1'' = \frac{y''\,\Delta^2}{(\delta - \beta\,y')^3}.$$

Für den Punkt P gilt somit

$$\varrho_1 = \frac{(1 + y_1'^2)^{3/2}}{y_1''} = \frac{(\delta^2 + \gamma^2)^{3/2}}{\Delta^2}\,\varrho. \tag{4}$$

Die Einheitsstrecke auf der x-Achse geht über in eine Strecke der Länge

$$\lambda = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2} = \frac{(\delta^2 + \gamma^2)^{1/2}}{\Delta}.$$

Damit wird (4) zu (1). E. Trost.

[1]) Vgl. die Bestimmung der Scheitelkrümmungsradien bei A. Hess, Analytische Geometrie, 3. Aufl., S. 75.