

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1948)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Ähnliche Abbildungen ebener Figuren mit Nebenbedingungen  
**Autor:** Schüepp, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13578>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band III

Nr. 4

Seiten 73-88

Basel, 15. Juli 1948

## Ähnliche Abbildungen ebener Figuren mit Nebenbedingungen

In den «*Elementen der Mathematik*», Bd. I, Seite 1, behandelt P. BUCHNER die Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen. Die dabei benutzte Konstruktionsmethode läßt sich auch zur Lösung allgemeinerer Probleme benutzen. Es sollen im folgenden zu gegebenen Figuren ähnliche Figuren gesucht werden, derart, daß bestimmte Geraden dieser Figuren durch gegebene Punkte laufen oder auch bestimmte Punkte dieser Figuren auf gegebene Geraden zu liegen kommen.

Wir gehen von einer Verallgemeinerung der Quadrataufgabe aus:

I. In einer Ebene seien ein Vierseit  $g_1 g_2 g_3 g_4$  (Fig. 1) und vier Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$  gegeben. Es sollen die gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden

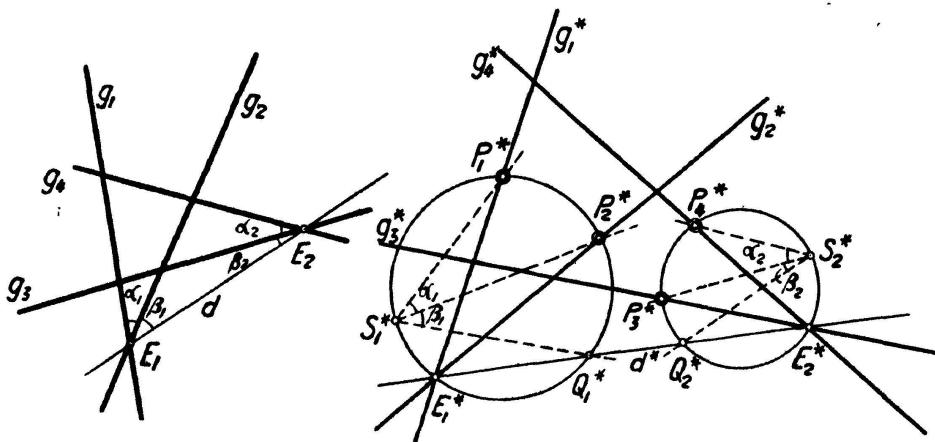


Fig. 1

Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$  zu den Geraden  $g_1, g_2, g_3, g_4$  der Reihe nach durch die vier Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$  laufen.

Die vier gegebenen Geraden seien eigentliche Geraden, von den vier gegebenen Punkten höchstens einer ein uneigentlicher, ein unendlich ferner Punkt.  $E_1 E_2$  sei ein (stets vorhandenes) Gegeneckenpaar aus eigentlichen Punkten im Vierseit  $g_1 \dots g_4$ ,  $d$  die zugehörige Diagonale. Wir betrachten die zu  $g_1 g_2 d$  gleichsinnig kongruenten Büschel, für welche die Geraden  $g_1^*$  und  $g_2^*$  durch  $P_1^*$  und  $P_2^*$  laufen. Der Ort

ihrer Scheitel  $S_1^*$  ist nach dem Peripheriewinkelsatz ein Kreis durch  $P_1^*$  und  $P_2^*$ . Die entsprechenden Geraden zu  $d$  gehen dabei durch einen festen Punkt  $Q_1^*$  des Kreises. In gleicher Weise ergibt sich für die gleichsinnig kongruenten Büschel zu  $g_3 g_4 d$  als Ort der Scheitel  $S_2^*$  ein Kreis durch  $P_3^* P_4^*$  mit dem festen Punkt  $Q_2^*$  für  $d^*$ . Für ein zu  $g_1 \dots g_4$  gleichsinnig ähnliches Vierseit, dessen Seiten durch  $P_1^* \dots P_4^*$  laufen, muß also notwendig  $Q_1^* Q_2^*$  Diagonale  $d^*$  sein. Damit sind die Ecken  $E_1^* E_2^*$  und die

Seiten  $g_1^* \dots g_4^*$  eindeutig festgelegt. Mehr als eine, und zwar unendlich viele Lösungen treten nur in dem speziellen Falle auf, wo  $Q_1^*$  und  $Q_2^*$  zusammenfallen. Soll das neue Vierseit zum gegebenen ungleichsinnig ähnlich sein, so treten an Stelle der beiden gezeichneten Kreise die in bezug auf  $P_1^* P_2^*$  und  $P_3^* P_4^*$  symmetrischen Kreise.

Wird die Zuordnung der Geraden  $g$  zu den Punkten  $P^*$  nicht vorgeschrieben, so sind für gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit je  $4! = 24$ , im ganzen also 48 Lösungen möglich. Diese Zahl verringert sich durch Zusammenfallen von Lösungen, wenn das gegebene Vierseit kongruente Abbildungen auf sich selbst zuläßt. In der folgenden Zusammenstellung bedeutet  $k_1$  die Zahl der gleichsinnigen derartigen Kongruenzen einschließlich der Identität (also  $k_1 \geq 1$ ),  $k_2$  die Zahl der ungleichsinnigen Kongruenzen,

$n = \frac{48}{k_1 + k_2}$  die Zahl der unter sich verschiedenen Lösungen. Die Figuren geben die zugehörigen Typen der Vierseite an (Fig. 2).

Spezialfälle dieser Art treten häufig auf, wenn als  $g_1 \dots g_4$  vier Seiten eines regulären  $n$ -Ecks gewählt werden. Als Anzahl aller regulären  $n$ -Ecke, von denen irgend vier Seiten durch vier gegebene Punkte laufen, findet man unter Benutzung der Angaben in Fig. 2:

$n$	4	5	6	7	8	...
Anzahl der Lösungen	6	24	48	144	198	...

Mit unserer Konstruktion nach Fig. 1 ist auch das zu I. duale Problem gelöst:

II. In einer Ebene seien ein Viereck  $P_1 P_2 P_3 P_4$  und vier Gerade  $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$  gegeben. Es sollen die gleichsinnig und die ungleichsinnig ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$  zu den Punkten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  der Reihe nach auf den vier Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$  liegen.

Wir bestimmen zum Vierseit  $g_1^* g_2^* g_3^* g_4^*$  das gleichsinnig oder ungleichsinnig ähnliche  $g_1 g_2 g_3 g_4$  derart, daß diese vier Geraden durch  $P_1, P_2, P_3, P_4$  laufen. Durch die beiden Vierseite ist dann die gesuchte ähnliche Abbildung definiert.

Wir kehren zurück zu unserer Grundaufgabe I. Es ist bereits auf den singulären Fall hingewiesen worden, daß  $Q_1^*$  und  $Q_2^*$  (Fig. 1) zusammenfallen und daß unendlich viele ähnliche Abbildungen existieren, welche den gestellten Forderungen genügen.

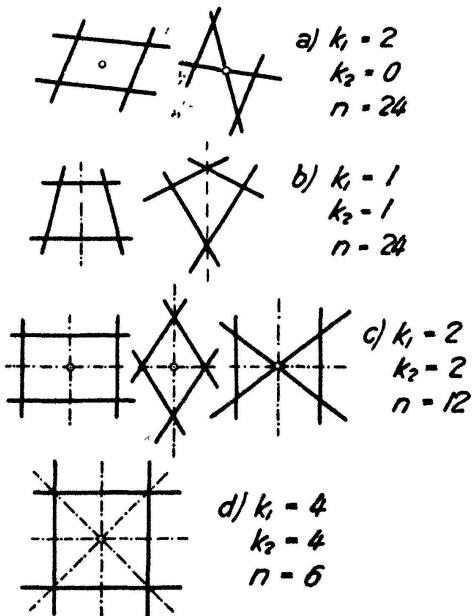


Fig. 2

Für ein gegebenes Vierseit sind, wenn dieser Fall eintreten soll, nur noch drei Punkte  $P^*$ , zum Beispiel  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  willkürlich wählbar; denn durch  $P_1^*, P_2^*, \alpha_1, \beta_1$  ist sowohl im Falle der gleichsinnigen als auch der ungleichsinnigen Ähnlichkeit  $Q_1^*$  festgelegt, damit auch  $Q_2^* = Q_1^*$  und durch  $Q_2^*, P_3^*, \alpha_2, \beta_2$  auch  $P_4^*$ . Der Zusammenhang aller Lösungen ließe sich an Hand von Fig. 1 weiter verfolgen. Doch ist eine symmetrische Behandlung der Elemente  $g_1, g_2, g_3$  und  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  vorzuziehen.

Durch drei Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  (Fig. 3) lassen sich, wie leicht ersichtlich, unendlich viele Gruppen  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  von Geraden legen, welche ein zu  $g_1, g_2, g_3$  gleichsinnig oder ungleichsinnig ähnliches Dreiseit bilden. Da beide Fälle analoge Zusammenhänge liefern, beschränken wir uns auf die Betrachtung der gleichsinnigen Ähnlichkeit. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt sofort, daß die Ecken  $E_1^*, E_2^*, E_3^*$  aller dieser Dreiseite auf drei Kreisen liegen und daß sich diese Kreise in einem festen Punkte  $S^*$  schneiden<sup>1)</sup>.

Da ferner die Geraden  $S^*E_1^*, S^*E_2^*, S^*E_3^*$  mit  $g_1^* g_2^* g_3^*$  konstante Winkel bilden, ist  $S^*$  stets entsprechender Punkt zu einem festen Punkt  $S$  im gegebenen Dreiseit  $g_1 g_2 g_3$ . Unsere ähnlichen Abbildungen sind vollständig definiert durch zwei entsprechende Strecken, zum Beispiel  $SE_1$  und  $S^*E_1^*$ . Für alle Lösungen bleibt  $S^*$  fest, während  $E_1^*$  einen Kreis durch  $S^*$  durchläuft. Eine Gerade durch  $E_1^*$  wird sich dabei nach dem Peripheriewinkelsatz um einen festen Punkt dieses Kreises drehen. Da irgendeine andere Strecke  $S^*P^*$  mit  $S^*E_1^*$  einen konstanten Winkel bildet und ihr proportional ist, gilt das gleiche für alle Punkte und alle Geraden unserer Figur<sup>2)</sup>.

Ein anschauliches Bild von der Gesamtheit dieser ähnlichen Systeme erhält man, wenn man die Veränderungen der Lage und Größe einer einfachen Figur, etwa eines Dreiecks, verfolgt (Fig. 4). In  $S^*$  schrumpft diese Figur auf einen Punkt zusammen.

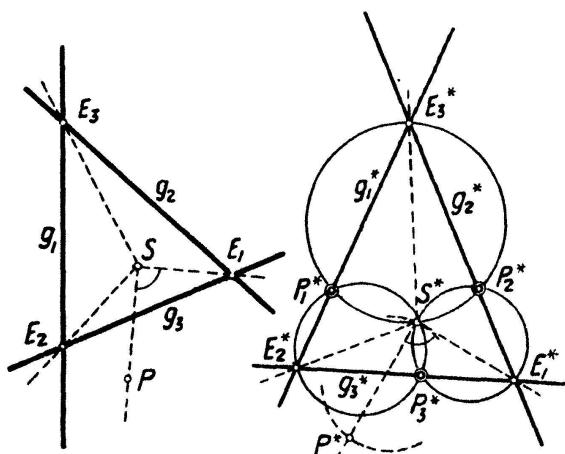


Fig. 3

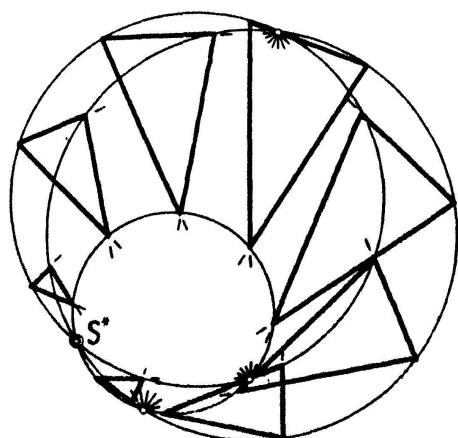


Fig. 4

Unsere Ergebnisse enthalten die Lösung eines weiteren Abbildungsproblems, nämlich:

III. In einer Ebene sei eine Figur, bestehend aus einem Dreiseit  $g_1 g_2 g_3$  und einem Punkt  $P$ , ferner drei Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  und eine Gerade  $g^*$  gegeben. Es sollen die

<sup>1)</sup> Vgl. G. BALASTER, Lösung von Aufgabe 1, Elemente der Mathematik, Bd. I, Seite 111, Hilfssatz 1.

<sup>2)</sup> Vgl. die Bemerkung von P. FINSLER zur Lösung von Aufgabe 1, Elemente der Mathematik, Bd. I, Seite 112.

gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  zu den Geraden  $g_1, g_2, g_3$  der Reihe nach durch die gegebenen Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  laufen und für welche gleichzeitig der entsprechende Punkt  $P^*$  zu  $P$  auf der gegebenen Geraden  $g^*$  liegt.

Wir bestimmen das System der ähnlichen Abbildungen, für welche  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  durch  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  gehen. Es genügt dazu die Konstruktion des Punktpaars  $S, S^*$  (Fig. 3) und des Bahnkreises von  $E_1^*$ . In diesem System durchläuft der entsprechende Punkt  $P^*$  zu  $P$  einen Kreis durch  $S^*$ . Die Schnittpunkte dieses Kreises mit  $g^*$  definieren die ähnlichen Abbildungen, welche alle gestellten Forderungen erfüllen. Für die gleichsinnige und für die ungleichsinnige Ähnlichkeit sind also 2, 1 oder 0 Lösungen vorhanden.

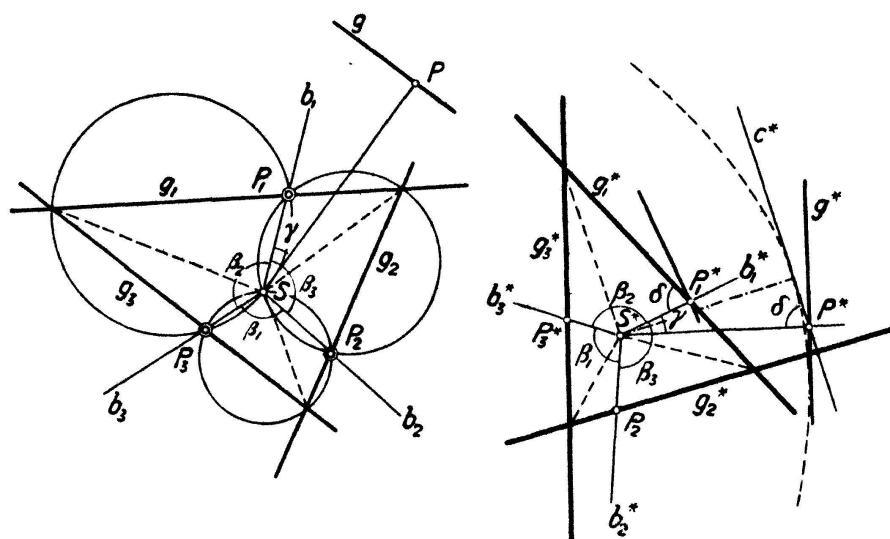


Fig. 5

Wir wenden uns der dualen Aufgabe zu. Gegeben seien das Dreieck  $P_1P_2P_3$  (Fig. 5) und die drei Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$ ; gesucht die zu  $P_1P_2P_3$  ähnlichen Dreiecke  $P_1^*P_2^*P_3^*$ , deren Ecken auf den gegebenen Geraden liegen. Um die Figuren übersichtlich zu halten, beschränken wir uns wieder auf die gleichsinnige Ähnlichkeit. Wir konstruieren analog wie beim Übergang von Aufgabe I. zu Aufgabe II. die zum Dreiseit  $g_1^* g_2^* g_3^*$  ähnlichen Dreiseite  $g_1 g_2 g_3$ , deren Seiten durch  $P_1, P_2, P_3$  laufen. Jedes solche Dreiseit definiert zusammen mit  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  eine ähnliche Abbildung derart, daß  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  auf den gegebenen Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  liegen. Wiederum sind  $S, S^*$  entsprechende feste Punkte. Wir erhalten also alle Lösungen, indem wir das Strahlbüschel  $b_1^* b_2^* b_3^*$  um  $S^*$  drehen und diese Strahlen mit  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  schneiden. Jede unserer ähnlichen Abbildungen ist wieder definiert durch ein entsprechendes Streckenpaar, zum Beispiel  $SP_1$  und  $S^*P_1^*$ . Für alle Lösungen bleibt  $S^*$  fest, während  $P_1^*$  eine Gerade  $g_1^*$  durchläuft. Eine normale Gerade zu  $S^*P_1^*$  durch  $P_1^*$  umhüllt dabei eine Parabel mit dem Brennpunkt  $S^*$  und der Scheiteltangente  $g_1^*$ . Aus den schon beim dualen Problem angegebenen Gründen überträgt sich diese Eigenschaft auf alle Punkte  $P^*$  mit den zugehörigen zu  $S^*P^*$  normalen Geraden  $g^*$ . Fig. 5 zeigt die Lage der Bahngeraden  $c^*$  des Punktes  $P^*$ ;  $c^*$  ist die Scheiteltangente

der von  $g^*$  umhüllten Parabel. Man erhält wieder ein anschauliches Bild für die Gesamtheit der ähnlichen Systeme mit einer Serie entsprechender Dreiecke (Fig. 6).

Mit unseren Ergebnissen erhalten wir die Lösung der Aufgabe:

IV. In einer Ebene seien eine Figur, bestehend aus einem Dreieck  $P_1P_2P_3$  und einer Geraden  $g$ , gegeben, ferner drei Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  und ein Punkt  $P^*$ . Es sollen die gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  zu  $P_1, P_2, P_3$  der Reihe nach auf den Geraden  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  liegen und für welche gleichzeitig die entsprechende Gerade  $g^*$  zu  $g$  durch den Punkt  $P^*$  läuft.

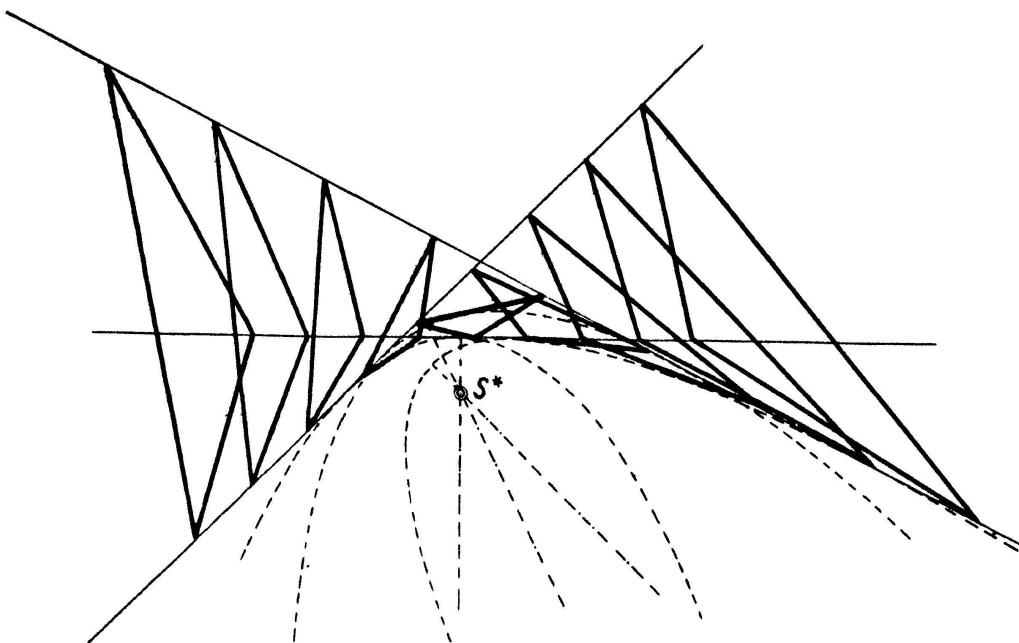


Fig. 6

Wir bestimmen analog wie bei III. das Punktpaar  $SS^*$  und die Parabel, welche von den entsprechenden Geraden zu  $g$  umhüllt wird. An diese Parabel legen wir vom gegebenen Punkt  $P^*$  aus die Tangenten  $g^*$ . Die Geraden  $g$  und  $g^*$  und das Punktpaar  $S, S^*$  definieren die gesuchten ähnlichen Abbildungen.

Es bleibt uns noch eine in sich selbst duale Aufgabe vom Typus der Aufgaben I.–IV. zu lösen, nämlich:

V. In einer Ebene seien eine Figur, bestehend aus zwei Geraden  $g_1, g_2$  und zwei Punkten  $P_3, P_4$ , gegeben, ferner zwei Punkte  $P_1^*, P_2^*$  und zwei Geraden  $g_3^*, g_4^*$ . Es sollen die gleichsinnig und die ungleichsinnig ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Geraden  $g_1^*, g_2^*$  zu  $g_1, g_2$  durch die Punkte  $P_1^*, P_2^*$  laufen und zugleich die entsprechenden Punkte  $P_3^*, P_4^*$  zu  $P_3, P_4$  auf  $g_3^*$  und  $g_4^*$  liegen.

Wir gehen (Fig. 7) aus von dem Strahlenbüschel der Geraden  $g_1, g_2, p_3$  ( $= SP_3$ ) und  $p_4$  ( $= SP_4$ ) in der gegebenen Figur. Ihm entspricht in der gesuchten Figur, wenn wir gleichsinnige Ähnlichkeit voraussetzen, ein gleichsinnig kongruentes Büschel. Zwei Strahlen desselben müssen durch die gegebenen Punkte  $P_1^*, P_2^*$  laufen; Ort des Scheitels  $S'$  ist also ein Kreis durch  $P_1^*P_2^*$ . Nach dem Peripheriewinkelsatz drehen sich die entsprechenden Strahlen zu  $p_3$  und  $p_4$  um zwei feste Kreispunkte

$Q_3^*, Q_4^*$ . Wir schneiden diese Strahlen  $p'_3, p'_4$  mit den gegebenen Geraden  $g_3^*, g_4^*$ . Durch Abtragen der Winkel  $\alpha_3, \alpha_4$  in  $P'_3, P'_4$  bekommen wir zwei parallele Gerade  $l'_3, l'_4$ . Können wir den Scheitel  $S'$  so wählen, daß diese zwei Geraden zusammenfallen, so haben wir die zur gegebenen ähnliche Figur gefunden, welche alle Forderungen der Aufgabe erfüllt. Wir legen noch durch einen festen Punkt  $O^*$  die parallele Gerade zu  $l'_3, l'_4$ ;  $P'_\infty$  sei ihr unendlich ferner Punkt. Lassen wir  $S'$  den Kreis durchlaufen, so

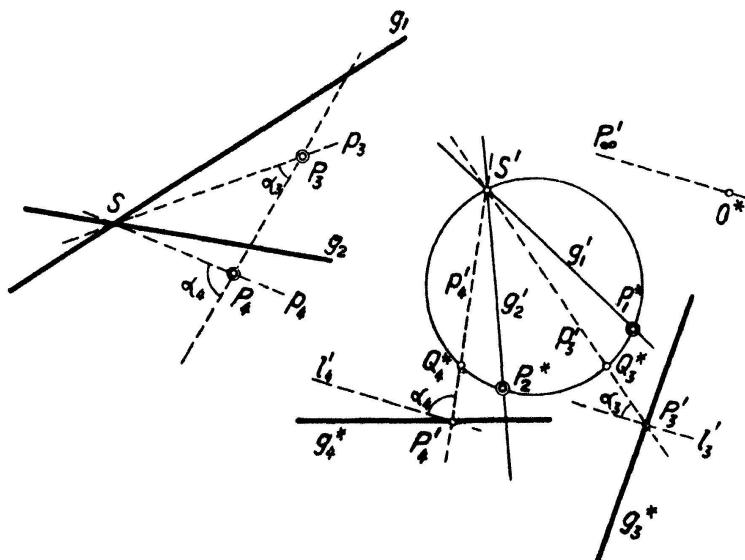


Fig. 7

erhalten wir in  $Q_3^*, Q_4^*, O^*$  drei kongruente Strahlbüschel. Ihre Schnittpunkte  $P'_3, P'_4$  und  $P'_\infty$  mit den Geraden  $g_3^*, g_4^*$  und der unendlich fernen Geraden liefern drei projektive Punktreihen. Infolgedessen umhüllen  $l'_3$  ( $= P'_3 P'_\infty$ ) und  $l'_4$  ( $= P'_4 P'_\infty$ ) zwei Parabeln. Die im Endlichen liegenden gemeinsamen Tangenten derselben liefern die gewünschten zusammenfallenden Geraden  $l'_3, l'_4$  und damit die Lösung der Aufgabe. Für gleichsinnige und analog für ungleichsinnige Ähnlichkeit mit dem in bezug auf  $P_1^* P_2^*$  symmetrischen Kreis ergeben sich also 3, 2 oder 1 Lösungen. Mit Zirkel und Lineal allein ist deren Konstruktion nicht möglich.

Entsprechende Aufgaben lassen sich auch für kongruente Abbildungen stellen. Es sei zum Beispiel ein zu  $g_1, g_2, g_3$  gleichsinnig oder ungleichsinnig kongruentes Dreiseit zu zeichnen, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  laufen. Die Lösung für die gleichsinnige Kongruenz ergibt sich sofort aus Fig. 3.  $S^*E_1^*$  ist gleich  $SE_1$  zu wählen. Fig. 5 liefert die Lösung der dualen Aufgabe.  $S^*P_1^*$  muß in diesem Falle gleich  $SP_1$  sein. Die Bestimmung einer kongruenten Abbildung, bei der zwei Gerade durch gegebene Punkte gehen und gleichzeitig ein Punkt auf einer gegebenen Geraden liegen soll und auch die duale Aufgabe führen auf die Konstruktion der Schnittpunkte einer Pascalschen Schneckenlinie mit einer Geraden.

H. SCHÜEPP, Zürich.