Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

welche F_2 in I schneidet, so erhält man zwei Kreise c und c', welche in bezug auf den Kreis I invers sind.

Da auf der Kugel jeder Punkt als Nabelpunkt betrachtet werden kann, so ist klar, daß es sich dann dabei um die gewöhnliche stereographische Projektion handelt, bei der alles Vorhergehende gültig bleibt. ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois.

Kleine Mitteilungen

I. *Noch eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist*

In den Elementen Bd. II, S. 14–16, zeigte Herr P. BUCHNER, daß es im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Inkreisradius zu konstruieren. Hier sei eine weitere Aufgabe derselben Art mitgeteilt.

Aufgabe: Man konstruiere ein Dreieck aus zwei Seiten a und c und der Winkelhalbierenden eines Gegenwinkels der beiden Seiten, etwa w_γ (im folgenden kurz mit w bezeichnet).

Wir suchen zunächst eine Beziehung zwischen den drei Seiten a, b, c und der Winkelhalbierenden w_γ. Mit Hilfe des Kosinussatzes, angewandt auf die beiden Teildreiecke in Fig. 1, folgt nach Elimination der Größen p, q und $\cos(\gamma/2)$, wenn wir $b = x$ setzen:

$$a x^3 + (2 a^2 - w^2) x^2 + (a^3 - a c^2 - 2 a w^2) x - a^2 w^2 = 0 \qquad (1)$$

Die Lösung der Aufgabe hängt somit von dieser Gleichung dritten Grades ab. Die Diskriminante

$$D = 4 a^2 c^2 w^6 + a^2 c^2 (12 a^2 + c^2) w^4 + 4 a^4 c^2 (3 a^2 + 5 c^2) w^2 + 4 a^4 c^2 (a^2 - c^2)^2 \qquad (2)$$

ist als Summe von Quadraten stets positiv, sofern nicht a, c und w gleichzeitig verschwinden. Wir haben also den *Casus irreducibilis* vor uns, und die Gleichung (1) besitzt drei reelle und verschiedene Wurzeln.

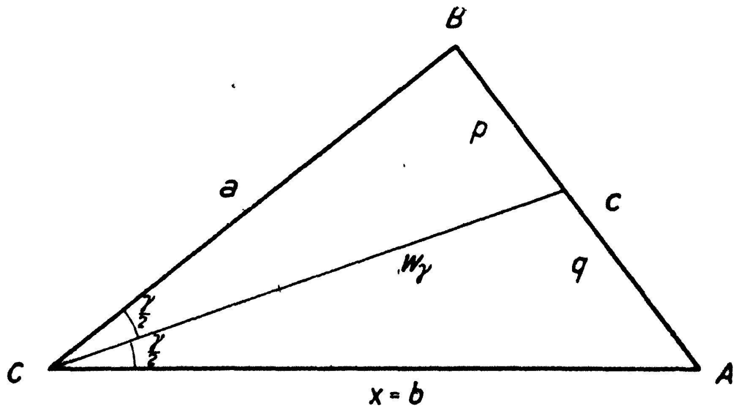

Fig. 1

Wir bestimmen die Anzahl der uns allein interessierenden positiven Wurzeln. Da $a > 0$ und $-a^2 w^2 < 0$ ist es nach der Descartesschen Zeichenregel ausgeschlossen, daß (1) zwei positive Lösungen aufweist. Es ist aber auch nicht möglich, daß drei positive Wurzeln auftreten, denn aus $2 a^2 - w^2 < 0$ und $a^3 - a c^2 - 2 a w^2 > 0$ folgt die sogar für reelle Werte a und c unmögliche Ungleichung $3 a^2 < -c^2$. Der Fall einer einzigen positiven Wurzel ergibt sich, wenn nur ein Vorzeichenwechsel auftritt. In der Gleichung $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ muß entweder $a_2 > 0$ und $a_1 \lessgtr 0$ oder $a_2 < 0$ und $a_1 < 0$ sein. Alle drei Möglichkeiten können realisiert werden.

Um über die Lage der positiven Wurzel eine Übersicht zu haben, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = a x^3 + (2 a^2 - w^2) x^2 + (a^3 - a c^2 - 2 a w^2) x - a^2 w^2. \qquad (3)$$

Es ist

$$f(0) = -a^2 w^2 < 0,$$
$$f(a) = a^2(4a^2 - 4w^2 - c^2) \lesseqgtr 0.$$

Damit ergibt sich die folgende Diskussion:

1. Fall: $4a^2 > 4w^2 + c^2$ 1 positive Wurzel $0 < x < a$.
2. Fall: $4a^2 = 4w^2 + c^2$ Lösung $x = a$; die Gleichung (1) ist reduzibel.
3. Fall: $4a^2 < 4w^2 + c^2$ 1 positive Wurzel $x > a$.

Da die Dreiecksungleichungen erfüllt sein müssen, ist das Dreieck nur dann reell, wenn die Winkelhalbierende zwischen den folgenden Grenzen liegt:

$$\left.\begin{array}{ll} a > c: & \dfrac{2a(a-c)}{2a-c} < w < \dfrac{2a(a+c)}{2a+c} \\ a < c: & 0 < w < \dfrac{2a(a+c)}{2a+c} \end{array}\right\}. \tag{4}$$

In beiden Fällen wird damit $x < a + c$.

Die Gleichung (1) ist im allgemeinen irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen. Es lassen sich leicht Zahlenbeispiele angeben. Daraus folgt aber sofort die Unmöglichkeit der Konstruktion mit Zirkel und Lineal allein.

Reduzible Gleichungen (1) ergeben sich für die gleichschenkligen Dreiecke mit $a = b$ oder $b = c$. Es existieren auch nichttriviale Fälle, wo (1) zerfällt. Um dies einzusehen, formen wir die Gleichung um.

$$w^2(a+x)^2 = a\,x\,[(a+x)^2 - c^2]. \tag{1a}$$

Es genügt, solche Zahlentripel a, x und c zu suchen, für die w rational wird. Die diophantische Gleichung (1a) lösen wir im einfachsten Falle, indem wir die eckige Klammer zu einem Quadrat machen:

$$\left.\begin{array}{r} a + x = \lambda^2 + \mu^2 \\ c = 2\lambda\mu \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Der Faktor $a\,x$ wird ein Quadrat, wenn wir

$$a = \lambda^2, \quad x = \mu^2 \tag{6}$$

wählen. Damit wird

$$w = \frac{\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2 + \mu^2}. \tag{7}$$

Etwas allgemeiner ist der Ansatz

$$a = \sigma^2, \quad x = \tau^2 \tag{6a}$$

mit der Bedingung $\sigma^2 + \tau^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Sind ξ und ζ zwei Parameter, dann erhalten wir

$$\sigma = \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2}[\lambda(\zeta^2 - \xi^2) + 2\mu\xi\zeta],$$
$$\tau = \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2}[\mu(\xi^2 - \zeta^2) + 2\lambda\xi\zeta],$$

woraus sich bei gegebenen λ und μ die Stücke a, x, c und w berechnen lassen.

Wir können somit auf verschiedene Arten beliebig viele Zahlentripel a, c, w finden, für die die Gleichung (1) reduzibel wird.

Beispiel: Es sei $\lambda = 3$, $\mu = 2$. Mittels (5), (6) und (7) ergibt sich nach Beseitigung der Brüche

$$a = 117, \quad c = 156, \quad w = 30 \; (x = 52).$$

Die Gleichung (1) hat mit diesen Werten die positive Wurzel $x_1 = +52$ und die beiden negativen, irrationalen Wurzeln $x_2 \approx -7{,}47$ und $x_3 \approx -270{,}83$.

Bemerkungen:

1. Aus (1a) folgt, daß ein Dreieck aus a, b und der Winkelhalbierenden w_γ des eingeschlossenen Winkels im klassischen Sinne konstruierbar ist.

2. Es lassen sich leicht noch weitere Aufgaben bilden, die auf irreduzible Gleichungen höheren als zweiten Grades führen. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur eine Dreieck-

seite durch eine andere Strecke zu ersetzen. Zum Beispiel:

$$c,\ s_a,\ w_\alpha\text{: Gleichung 3. Grades,}$$
$$c,\ h_c,\ w_\alpha\text{: Gleichung 4. Grades.}$$

Interessant ist es, festzustellen, daß manche Konstruktionsaufgaben, in denen eine (oder zwei) Winkelhalbierende auftritt, mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Die Winkelhalbierende scheint also eine gewisse Ausnahmerolle zu spielen.

E. ROTH-DESMEULES, Luzern.

II. *Eine exakte Eierkurvenkonstruktion mit technischen Anwendungen*

Die zeichnerische Darstellung des Verlaufs der Oberflächenkrümmung eines technischen Körpers, vor allem von Verkehrsmitteln mit Stromlinienform (Boot, Auto, Flugzeug), durch systematisch geführte Schnitte heißt in der Ingenieursprache «Strak».

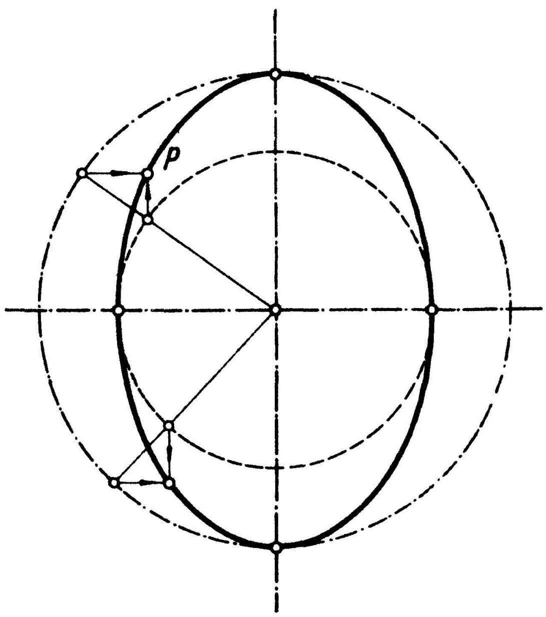

Fig. 1. Punktweise Ellipsenkonstruktion.

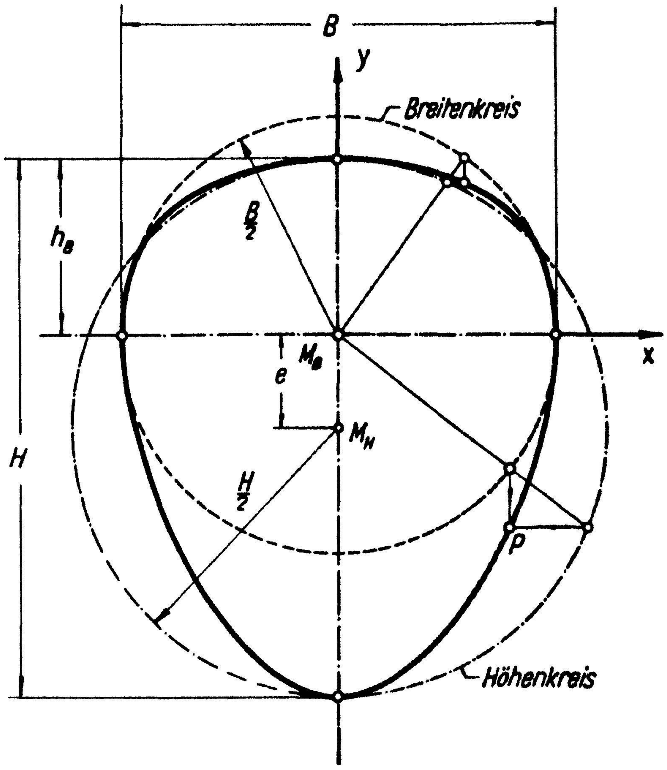

Fig. 2. Punktweise Konstruktion einer Eierkurve nach F. HÜGELSCHÄFFER.

Die Konstruktion eines Strakplans ist wegen der Veränderlichkeit der Krümmung in den beiden Hauptschnittebenen und wegen der Rücksichten auf die Fahrzeuginnenarchitektur und die Strömungsgesetze meistens schwierig. Infolge der eigenwilligen Umrißformen scheint die Gesetzmäßigkeit der Krümmung mathematisch zunächst kaum so erfaßbar zu sein, daß sich unschwer handliche Gleichungen angeben lassen. Es muß aber von einem Strak verlangt werden, daß durch Zeichenungenauigkeit hervorgerufene Schwankungen der Wölbungsstetigkeit bestmöglich ausgeschaltet bleiben. Es haben sich daher wohl schon seit langen Zeiten immer wieder Grübler unter den Bootsbauern damit beschäftigt, Verfahren zu finden, die umständliche zeichnerische Näherung zu verbessern. Hier soll das auf bestimmte Fälle angewandte *Eierstrakverfahren* von FRITZ HÜGELSCHÄFFER im Ausschnitt soweit besprochen werden, als es vielleicht von allgemeinerer Bedeutung ist.

Es handelt sich um die mathematisch exakte Konstruktion von Eierkurven, wie sie außer im Flugzeugbau auch z.B. beim Gewölbebau, etwa als Querschnittsformen für begehbare Kanalquerschnitte der Entwässerungsleitungen von Großstädten, wichtig ist. Ihre Darstellung durch eine exakte und vor allem einfache mathematische Gleichung und ihre Beschreibung durch eine möglichst einfache Konstruktionsvorschrift ist wichtig, nicht allein wegen des idealen Spannungsverlaufes in einer Schale ohne Krümmungsunstetigkeit, sondern überhaupt auch wegen der vielerlei rechnerischen Annehmlichkeiten einer mathematisch vorliegenden Querschnittsform bei der Bestimmung der Querschnittsfläche, von Flächenabschnitten, Momenten verschiedener Art und sonstiger technischer Größen.

Das Verfahren von HÜGELSCHÄFFER knüpft an die hinreichend bekannte Ellipsenkonstruktion in Fig. 1 an. Das Ei wird durch drei Stücke: Höhe H, Breite B und Höhenlage h_B der größten Breite beschrieben. Die Konstruktionsvorschrift entspricht genau jener der Ellipse in Fig. 1 und geht wohl hinreichend klar aus Fig. 2 hervor.

Für die Eikurve läßt sich leicht die folgende einfache Gleichung ableiten:

$$\left(\frac{y-e}{H/2}\right)^2+\left(\frac{x}{B/2}\right)^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2\left(\frac{2\,y}{e}-1\right)=1\,;$$

dabei ist

$$e=\frac{H}{2}-h_B \quad \text{und} \quad k=H\,\frac{B}{4\,e}\,.$$

Ohne den dritten Summanden, der die Unsymmetrie der Kurve zur Querachse besorgt, würde die Gleichung eine Ellipse mit den Achsen H und B darstellen.

Es leuchtet ein, daß sich durch Auffädeln von Querschnitten beliebiger Eiform nach einer – gewöhnlich zeichnerisch gegebenen – Vorschrift für ihren gegenseitigen Abstand und den Verlauf der Parameter H, B und h_B, also von Aufriß, Grundriß und Verlauf der Linie der größten Breite, ein «strakender» Körper ergibt, d.h. ein Körper ohne Unstetigkeiten oder Schwankungen seiner Oberflächenkrümmung.

Als Ausblick mag es für den Theoretiker wie auch für den spekulativen Praktiker nicht uninteressant sein, auf jene Kurvenformen hinzuweisen, die sich bei der Wahl eines unsymmetrisch liegenden Strahlenmittelpunktes ergeben und wenn statt des Höhen- oder (bzw. und) Breitenkreises andersgeartete Hilfslinien eingeführt werden. Es wird dadurch unter Umständen ein Weg gezeigt, auch gewisse unsymmetrische oder sonst schwierig zu vermessende Körper zu straken. H. SCHMIDBAUER, Göggingen b. Augsburg.

Literaturüberschau

RUDOLF FUETER:

Das mathematische Werkzeug des Chemikers, Biologen, Statistikers und Soziologen. Vorlesungen über die höheren mathematischen Begriffe in Verbindung mit ihren Anwendungen. Orell Füßli Verlag, dritte, verbesserte und vermehrte Auflage, Zürich 1947.

Wir begrüßen die vor kurzem fertiggestellte dritte Auflage dieses Werkes, das sich, insbesondere bei Naturwissenschaftern, bereits viele Freunde erworben hat. Wie der Verfasser im Vorwort sagt, legt er das Hauptgewicht auf das Verständnis der mathematischen Begriffswelt und deren Anwendungsmöglichkeit in den verschiedensten Gebieten, nicht aber auf weitgehendste Beherrschung mathematischer Methoden und Kenntnisse: «Das Bedürfnis weiter Kreise liegt meiner Meinung nach hauptsächlich in dem Wunsche, Einsicht zu erhalten, wie die scharfen mathematischen Begriffe klärend und vorteilhaft in allen möglichen Gebieten auftreten. Das Buch wendet sich außer an Chemiker, Biologen und Mediziner auch an alle Lehrer der Naturwissenschaften.»

Die ersten beiden Kapitel geben eine leichtverständliche, immer wieder an Beispielen illustrierte Einführung in die Differentialrechnung und ihre Anwendung auf die Bestimmung von Extremwerten und von Wendepunkten. Ferner werden hier auch die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene entwickelt. Das dritte und vierte Kapitel bringen in ebenso ansprechender, immer auf das mathematisch Wesentliche zielender Art die Grundbegriffe der Integralrechnung und eine Anzahl Anwendungen aus verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebieten (Gesetz von GULDBERG und WAAGE,