

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1948)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Eigenschaften von Flächen zweiter Ordnung, hergeleitet mit Hilfe stereographischer Projektion  
**Autor:** Emch, Arnold  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13577>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eigenschaften von Flächen zweiter Ordnung, hergeleitet mit Hilfe stereographischer Projektion

## 1. Einleitung

Nichtsinguläre Flächen zweiter Ordnung  $F_2$ , die in dieser Arbeit behandelt werden, mit Ausnahme des einschaligen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids, haben reelle Nabelpunkte, das heißt Grenz- oder Nullkreise der Kreissysteme, die von besondern Büscheln paralleler Ebenen auf diesen Flächen ausgeschnitten werden. Flächen mit Mittelpunkt  $M$  haben im allgemeinen 16 solche Punkte, wovon vier reell sind, die sich in zwei Paare in bezug auf  $M$  diametral gelegene Punkte ordnen (Enden zweier bestimmter Durchmesser von  $F_2$ ). Beim elliptischen Paraboloid sind die unendlich fernen Punkte dieser Durchmesser als Nabelpunkte zu betrachten.

Ein Nabelpunkt ist geometrisch der Berührungspunkt einer Tangentialebene von  $F_2$ , die parallel zu den Ebenen des zugehörigen Kreissystems ist.

## 2. Projektion einer $F_2$ von einem Nabelpunkt aus

Sei  $N$  ein Nabelpunkt auf  $F_2$ ,  $e_1$  eine zugehörige Kreisschnittebene, welche  $F_2$  in einem Kreise  $I$  schneidet; ferner  $e$  eine beliebige Ebene, welche  $F_2$  in einem Kegelschnitt  $k$  und  $e_1$  in einer Geraden  $s$  schneidet. Die Schnittpunkte von  $s$  mit  $I$  seien  $A$  und  $B$ , welche reell oder imaginär sein können. Durch diese geht auch  $k$ . Die Ebene  $e$  sei durch drei beliebige Punkte  $P, Q, R$  auf  $F_2$  bestimmt. Diese projiziere man von  $N$  auf  $e_1$ , wodurch  $P_1, Q_1, R_1$  erhalten werden, welche den Kreis  $c$  bestimmen. Der durch  $c$  gehende Kegel  $K$  mit Spitze in  $N$  schneidet  $F_2$  in einer Kurve vierter Ordnung  $C_4$ , welche durch  $P, Q, R, N$  geht. Da jedoch die Kreisschnitte von  $K$  parallel mit denjenigen von  $F_2$  sind, so schneidet  $K$  die Fläche  $F_2$  bei  $N$  in einem Nullkreise, so daß die Restkurve von  $C_4$  ein durch  $P, Q, R$  gehender Kegelschnitt  $k^*$  sein wird, der notwendigerweise mit  $k$  zusammenfallen muß. Umgekehrt fällt dann die Projektion von  $k$  von  $N$  auf  $e_1$  mit  $c$  zusammen. Da  $k$  als irgendein Kegelschnitt auf  $F_2$  angenommen wurde, so hat man

*Satz 1. Wird ein reeller Kegelschnitt  $k$  auf  $F_2$  von einem ihrer Nabelpunkte  $N$  auf eine Ebene  $e_1$  projiziert, die  $F_2$  in einem Kreise  $I$  schneidet, der zu dem entsprechenden Kreissystem gehört, so ist die Projektion ein Kreis  $c$ . Alle drei,  $k, c$  und  $I$ , haben dieselben reellen oder imaginären Punkte  $A$  und  $B$  gemeinsam.*

## 3. Projektionen von zwei diametral gelegenen Nabelpunkten aus

In derselben Weise kann jetzt der Kegelschnitt  $k$  von dem zu  $N$  diametral gelegenen Nabelpunkt  $N'$  auf  $e_1$  projiziert werden, wodurch ein Kreis  $c'$  erhalten wird, der auch durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht. Da die projizierenden Kegel  $K$  und  $K'$  beide durch  $k$  gehen, so haben sie zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen, deren Spuren  $t$  und  $t'$  durch den Schnittpunkt  $O$  von  $NN'$  mit  $e_1$ , dem Mittelpunkt von  $I$  gehen und gemeinschaftliche Tangenten von  $c$  und  $c'$  sind.

Daraus folgt, daß  $c$  und  $c'$  invers in bezug auf  $I$  als Inversionskreis sind. Somit:

*Satz 2. Projiziert man einen beliebigen reellen Kegelschnitt  $k$  auf  $F_2$  von zwei diametral gelegenen Nabelpunkten  $N$  und  $N'$  auf eine zugehörige Kreisschnittebene  $e_1$ ,*

welche  $F_2$  in  $I$  schneidet, so erhält man zwei Kreise  $c$  und  $c'$ , welche in bezug auf den Kreis  $I$  invers sind.

Da auf der Kugel jeder Punkt als Nabelpunkt betrachtet werden kann, so ist klar, daß es sich dann dabei um die gewöhnliche stereographische Projektion handelt, bei der alles Vorhergehende gültig bleibt.

ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois.

## Kleine Mitteilungen

### I. Noch eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

In den Elementen Bd. II, S. 14–16, zeigte Herr P. BUCHNER, daß es im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Inkreisradius zu konstruieren. Hier sei eine weitere Aufgabe derselben Art mitgeteilt.

**Aufgabe:** Man konstruiere ein Dreieck aus zwei Seiten  $a$  und  $c$  und der Winkelhalbierenden eines Gegenwinkels der beiden Seiten, etwa  $w_\gamma$  (im folgenden kurz mit  $w$  bezeichnet).

Wir suchen zunächst eine Beziehung zwischen den drei Seiten  $a, b, c$  und der Winkelhalbierenden  $w_\gamma$ . Mit Hilfe des Kosinussatzes, angewandt auf die beiden Teildreiecke in Fig. 1, folgt nach Elimination der Größen  $p, q$  und  $\cos(\gamma/2)$ , wenn wir  $b = x$  setzen:

$$a x^3 + (2 a^2 - w^2) x^2 + (a^3 - a c^2 - 2 a w^2) x - a^2 w^2 = 0 \quad (1)$$

Die Lösung der Aufgabe hängt somit von dieser Gleichung dritten Grades ab. Die Diskriminante

$$D = 4 a^2 c^2 w^6 + a^2 c^2 (12 a^2 + c^2) w^4 + 4 a^4 c^2 (3 a^2 + 5 c^2) w^2 + 4 a^4 c^2 (a^2 - c^2)^2 \quad (2)$$

ist als Summe von Quadraten stets positiv, sofern nicht  $a, c$  und  $w$  gleichzeitig verschwinden. Wir haben also den *Casus irreducibilis* vor uns, und die Gleichung (1) besitzt drei reelle und verschiedene Wurzeln.

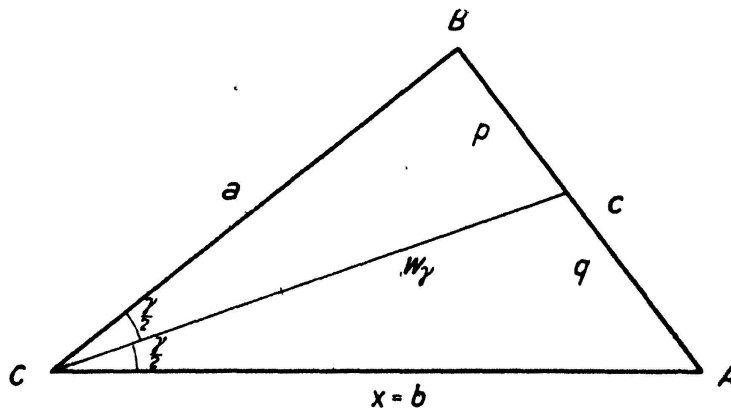


Fig. 1

Wir bestimmen die Anzahl der uns allein interessierenden positiven Wurzeln. Da  $a > 0$  und  $-a^2 w^2 < 0$  ist es nach der Descartesschen Zeichenregel ausgeschlossen, daß (1) zwei positive Lösungen aufweist. Es ist aber auch nicht möglich, daß drei positive Wurzeln auftreten, denn aus  $2 a^2 - w^2 < 0$  und  $a^3 - a c^2 - 2 a w^2 > 0$  folgt die sogar für reelle Werte  $a$  und  $c$  unmögliche Ungleichung  $3 a^2 < -c^2$ . Der Fall einer einzigen positiven Wurzel ergibt sich, wenn nur ein Vorzeichenwechsel auftritt. In der Gleichung  $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  muß entweder  $a_2 > 0$  und  $a_1 \leq 0$  oder  $a_2 < 0$  und  $a_1 < 0$  sein. Alle drei Möglichkeiten können realisiert werden.

Um über die Lage der positiven Wurzel eine Übersicht zu haben, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = a x^3 + (2 a^2 - w^2) x^2 + (a^3 - a c^2 - 2 a w^2) x - a^2 w^2. \quad (3)$$