Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 3

Artikel: Eigenschaften von Flächen zweiter Ordnung, hergeleitet mit Hilfe stereographischer Projektion

Autor: Emch, Arnold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13577

Eigenschaften von Flächen zweiter Ordnung, hergeleitet mit Hilfe stereographischer Projektion

1. *Einleitung*

Nichtsinguläre Flächen zweiter Ordnung F_2, die in dieser Arbeit behandelt werden, mit Ausnahme des einschaligen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids, haben reelle Nabelpunkte, das heißt Grenz- oder Nullkreise der Kreissysteme, die von besondern Büscheln paralleler Ebenen auf diesen Flächen ausgeschnitten werden. Flächen mit Mittelpunkt M haben im allgemeinen 16 solche Punkte, wovon vier reell sind, die sich in zwei Paare in bezug auf M diametral gelegene Punkte ordnen (Enden zweier bestimmter Durchmesser von F_2). Beim elliptischen Paraboloid sind die unendlich fernen Punkte dieser Durchmesser als Nabelpunkte zu betrachten.

Ein Nabelpunkt ist geometrisch der Berührungspunkt einer Tangentialebene von F_2, die parallel zu den Ebenen des zugehörigen Kreissystems ist.

2. *Projektion einer F_2 von einem Nabelpunkt aus*

Sei N ein Nabelpunkt auf F_2, e_1 eine zugehörige Kreisschnittebene, welche F_2 in einem Kreise I schneidet; ferner e eine beliebige Ebene, welche F_2 in einem Kegelschnitt k und e_1 in einer Geraden s schneidet. Die Schnittpunkte von s mit I seien A und B, welche reell oder imaginär sein können. Durch diese geht auch k. Die Ebene e sei durch drei beliebige Punkte P, Q, R auf F_2 bestimmt. Diese projiziere man von N auf e_1, wodurch P_1, Q_1, R_1 erhalten werden, welche den Kreis c bestimmen. Der durch c gehende Kegel K mit Spitze in N schneidet F_2 in einer Kurve vierter Ordnung C_4, welche durch P, Q, R, N geht. Da jedoch die Kreisschnitte von K parallel mit denjenigen von F_2 sind, so schneidet K die Fläche F_2 bei N in einem Nullkreise, so daß die Restkurve von C_4 ein durch P, Q, R gehender Kegelschnitt k^* sein wird, der notwendigerweise mit k zusammenfallen muß. Umgekehrt fällt dann die Projektion von k von N auf e_1 mit c zusammen. Da k als irgendein Kegelschnitt auf F_2 angenommen wurde, so hat man

Satz 1. Wird ein reeller Kegelschnitt k auf F_2 von einem ihrer Nabelpunkte N auf eine Ebene e_1 projiziert, die F_2 in einem Kreise I schneidet, der zu dem entsprechenden Kreissystem gehört, so ist die Projektion ein Kreis c. Alle drei, k, c und I, haben dieselben reellen oder imaginären Punkte A und B gemeinsam.

3. *Projektionen von zwei diametral gelegenen Nabelpunkten aus*

In derselben Weise kann jetzt der Kegelschnitt k von dem zu N diametral gelegenen Nabelpunkt N' auf e_1 projiziert werden, wodurch ein Kreis c' erhalten wird, der auch durch die Punkte A und B geht. Da die projizierenden Kegel K und K' beide durch k gehen, so haben sie zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen, deren Spuren t und t' durch den Schnittpunkt O von NN' mit e_1, dem Mittelpunkt von I gehen und gemeinschaftliche Tangenten von c und c' sind.

Daraus folgt, daß c und c' invers in bezug auf I als Inversionskreis sind. Somit:

Satz 2. Projiziert man einen beliebigen reellen Kegelschnitt k auf F_2 von zwei diametral gelegenen Nabelpunkten N und N' auf eine zugehörige Kreisschnittebene e_1, *welche F_2 in I schneidet, so erhält man zwei Kreise c und c', welche in bezug auf den Kreis I invers sind.*

Da auf der Kugel jeder Punkt als Nabelpunkt betrachtet werden kann, so ist klar, daß es sich dann dabei um die gewöhnliche stereographische Projektion handelt, bei der alles Vorhergehende gültig bleibt. ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois.

Kleine Mitteilungen

I. *Noch eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist*

In den Elementen Bd. II, S. 14–16, zeigte Herr P. BUCHNER, daß es im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Inkreisradius zu konstruieren. Hier sei eine weitere Aufgabe derselben Art mitgeteilt.

Aufgabe: Man konstruiere ein Dreieck aus zwei Seiten a und c und der Winkelhalbierenden eines Gegenwinkels der beiden Seiten, etwa w_γ (im folgenden kurz mit w bezeichnet).

Wir suchen zunächst eine Beziehung zwischen den drei Seiten a, b, c und der Winkelhalbierenden w_γ. Mit Hilfe des Kosinussatzes, angewandt auf die beiden Teildreiecke in Fig. 1, folgt nach Elimination der Größen p, q und $\cos(\gamma/2)$, wenn wir $b = x$ setzen:

$$a\,x^3 + (2\,a^2 - w^2)\,x^2 + (a^3 - a\,c^2 - 2\,a\,w^2)\,x - a^2\,w^2 = 0 \qquad (1)$$

Die Lösung der Aufgabe hängt somit von dieser Gleichung dritten Grades ab. Die Diskriminante

$$D = 4\,a^2\,c^2\,w^6 + a^2\,c^2(12\,a^2 + c^2)\,w^4 + 4\,a^4\,c^2(3\,a^2 + 5\,c^2)\,w^2 + 4\,a^4\,c^2(a^2 - c^2)^2 \qquad (2)$$

ist als Summe von Quadraten stets positiv, sofern nicht a, c und w gleichzeitig verschwinden. Wir haben also den *Casus irreducibilis* vor uns, und die Gleichung (1) besitzt drei reelle und verschiedene Wurzeln.

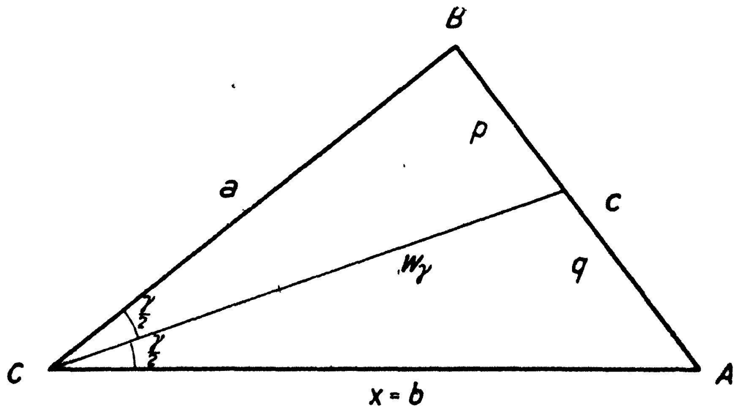

Fig. 1

Wir bestimmen die Anzahl der uns allein interessierenden positiven Wurzeln. Da $a > 0$ und $-a^2\,w^2 < 0$ ist es nach der Descartesschen Zeichenregel ausgeschlossen, daß (1) zwei positive Lösungen aufweist. Es ist aber auch nicht möglich, daß drei positive Wurzeln auftreten, denn aus $2\,a^2 - w^2 < 0$ und $a^3 - a\,c^2 - 2\,a\,w^2 > 0$ folgt die sogar für reelle Werte a und c unmögliche Ungleichung $3\,a^2 < -c^2$. Der Fall einer einzigen positiven Wurzel ergibt sich, wenn nur ein Vorzeichenwechsel auftritt. In der Gleichung $a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0$ muß entweder $a_2 > 0$ und $a_1 \lesseqgtr 0$ oder $a_2 < 0$ und $a_1 < 0$ sein. Alle drei Möglichkeiten können realisiert werden.

Um über die Lage der positiven Wurzel eine Übersicht zu haben, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = a\,x^3 + (2\,a^2 - w^2)\,x^2 + (a^3 - a\,c^2 - 2\,a\,w^2)\,x - a^2\,w^2. \qquad (3)$$