Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 3

Artikel: Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Autor: Jecklin, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13576

Wenn demnach für jedes System A von n Zahlen die Ungleichungen

$$m_1(A) \geqq m_2(A) \geqq m_3(A) \geqq \cdots \geqq m_n(A) \tag{1}$$

gelten, so gelten folgende Ungleichungen für das System B von $n+1$ Zahlen:

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_n(B). \tag{4}$$

Man kann schließlich noch beweisen, daß aus der Ungleichung

$$m_1^*(B) \geqq m_n(B) \tag{5}$$

notwendig die Ungleichung folgt

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Wendet man nämlich Ungleichung (5) auf das System der reziproken Werte $\frac{1}{b_1}; \frac{1}{b_2}; \ldots; \frac{1}{b_{n+1}}$ an, so wird

$$\frac{m_n^n(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)} \geqq \sqrt[n]{\frac{m_1(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)}},$$

was geschrieben werden kann

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq \frac{m_1(B)}{m_n(B)}\, m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

oder wegen (5)

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

somit

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgen also die behaupteten Relationen

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_{n+1}(B). \tag{2}$$

Die Ungleichungen (1) und (2) gelten aber für $n = 2$, somit gelten sie auch für $n = 3$, dann für $n = 4$ usw., das heißt, sie gelten *allgemein für jedes ganzzahlige n*.

H. KREIS, Winterthur.

Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Seien gegeben n positive Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und bezeichne $\underset{k}{C}\, a_i$ eine Kombination derselben zur Klasse k, so ergeben sich für jedes k im ganzen $\binom{n}{k}$ verschiedene solcher Kombinationen, und durch Summation derselben erhalten wir die den n Größen a_i zugeordneten n elementarsymmetrischen Funktionen $s_{n,k} = \Sigma \underset{k}{C}\, a_i$.

Mit $M_{n,k} = \sqrt[k]{\frac{s_{k,n}}{\binom{n}{k}}}$ definieren wir den grundlegenden algebraischen Mittelwert k-ter Ordnung der n Größen a_i (siehe «Elemente der Mathematik» III, Nr. 1). Es gilt, sofern nicht alle a_i einander gleich sind,

$$M_{n,1} > M_{n,2} > M_{n,3} > \cdots > M_{n,n},$$

wobei $M_{n,1}$ das arithmetische und $M_{n,n}$ das geometrische Mittel ist. Einen Beweis hiefür gibt u.a. die Arbeit von H. KREIS in diesem Heft.

Wir betrachten vorerst ein Rechteck mit den Seitenlängen a_1 und a_2. Der Umfang ist dann:

$$2(a_1 + a_2) = 2 s_{2,1} = 4 M_{2,1}$$

und die Fläche:

$$a_1 a_2 = s_{2,2} = M_{2,2}^2.$$

Offenbar ist $M_{2,1}$ die Seite des Quadrats mit gleichem Umfang und $M_{2,2}$ die Seite des Quadrats mit gleicher Fläche wie das Rechteck. Wegen $M_{2,1} > M_{2,2}$ folgt:

$$\text{a)}\quad M_{2,1}^2 > M_{2,2}^2 = a_1 a_2,$$

das heißt: von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt;

$$\text{b)}\quad 4 M_{2,2} < 4 M_{2,1} = 2(a_1 + a_2),$$

das heißt: von allen Rechtecken gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Sei nun gegeben ein rechtwinkliger Quader mit den respektiven Seitenlängen a_1, a_2 und a_3, so ist

die gesamte Kantenlänge: $4(a_1 + a_2 + a_3) = 4 s_{3,1} = 12 M_{3,1}$,
die gesamte Oberfläche: $2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = 2 s_{3,2} = 6 M_{3,2}^2$,
und das Volumen: $a_1 a_2 a_3 = s_{3,3} = M_{3,3}^3$.

Offenbar ist

$M_{3,1}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Kantenlängensumme,
$M_{3,2}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Oberfläche und
$M_{3,3}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleichem Volumen wie der Quader.

Wegen $M_{3,1} > M_{3,2} > M_{3,3}$ folgt

$$\text{a)}\quad 6 M_{3,1}^2 > 6 M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$
$$M_{3,1}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Kantenlängentotal hat der Würfel die größte Oberfläche und das größte Volumen;

$$\text{b)}\quad 12 M_{3,2} < 12 M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$
$$M_{3,2}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel die kleinste gesamte Kantenlänge, aber das größte Volumen;

$$\text{c)}\quad 6 M_{3,3}^2 < 6 M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$
$$12 M_{3,3} < 12 M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Volumen hat der Würfel die kleinste Oberfläche und das kleinste Kantenlängentotal.

Wir bezeichnen jetzt mit $B_{n,k}$ die Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente eines n-dimensionalen rechtwinkligen Quaders. Nachdem $M_{n,k}$ offenbar die Länge einer Kante des Würfels mit gleichem $B_{n,k}$ wie der Quader ist, folgt

$$B_{n,k} = Z_{n,k} M_{n,k}^k = Z_{n,k} \frac{s_{n,k}}{\binom{n}{k}},$$

wenn $Z_{n,k}$ die Zahl der k-dimensionalen Begrenzungselemente des n-dimensionalen Quaders bedeutet. Es ist aber

$$Z_{n,k} = Z_{n,k-1} \frac{n-k+1}{2k} = \binom{n}{k} 2^{n-k},$$

woraus auch folgt:

$$\frac{Z_{n,k}}{\binom{n}{k}} = \frac{Z_{n+t,k+t}}{\binom{n+t}{k+t}} = 2^{n-k}.$$

Sinngemäß bedeutet $Z_{n,0}$ die Zahl der Ecken des n-dimensionalen Quaders und ist gleich 2^n. Es ist somit also:

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} 2^{n-k} M_{n,k}^{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{s_{n,k}}{\binom{n}{k}} = 2^{n-k} s_{n,k}.$$

Folgender kleiner Tabellenausschnitt gibt eine ziffernmäßige Veranschaulichung der eben genannten Formeln:

n	$\binom{n}{0}$	$Z_{n,0}$	$\frac{Z_{n,0}}{\binom{n}{0}}$	$\binom{n}{1}$	$Z_{n,1}$	$\frac{Z_{n,1}}{\binom{n}{1}}$	$\binom{n}{2}$	$Z_{n,2}$	$\frac{Z_{n,2}}{\binom{n}{2}}$	$\binom{n}{3}$	$Z_{n,3}$	$\frac{Z_{n,3}}{\binom{n}{3}}$
0	1	1	1									
1	1	2	2	1	1	1						
2	1	4	4	2	4	2	1	1	1			
3	1	8	8	3	12	4	3	6	2	1	1	1
4	1	16	16	4	32	8	6	24	4	4	8	2
5	1	32	32	5	80	16	10	80	8	10	40	4
6	1	64	64	6	192	32	15	240	16	20	160	8

Es besteht also eine sehr einfache Beziehung zwischen der Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente einerseits und den elementarsymmetrischen Funktionen bzw. den grundlegenden algebraischen Mittelwerten anderseits, und es lassen sich die vorgängig für Ebene und euklidischen Raum genannten Sätze ohne weiteres auf n Dimensionen übertragen. Wegen

$$M_{n,1} > M_{n,2} > \cdots > M_{n,k-1} > M_{n,k} > \cdots > M_{n,n}$$

ist $\qquad Z_{n,k+t} M_{n,k}^{k+t} > Z_{n,k+t} M_{n,k+t}^{k+t} = B_{n,k+t} \qquad k+t \leqq n$

und $\qquad Z_{n,k-t} M_{n,k}^{k-t} < Z_{n,k-t} M_{n,k-t}^{k-t} = B_{n,k-t}, \qquad k-t \geqq 1$

das heißt: von allen n-dimensionalen Quadern mit $B_{n,k}$ = konstant hat der Würfel die größten $B_{n,k+t}$ und die kleinsten $B_{n,k-t}$, oder, mit anderen Worten: von allen n-dimensionalen Quadern mit gleicher Summe der k-dimensionalen Begrenzungselemente hat der Würfel die größten Summen der mehr als k-dimensionalen Begrenzungselemente und die kleinsten Summen der weniger als k-dimensionalen Begrenzungselemente.

H. JECKLIN, Zürich.